Čech-Kohomologie

Seminar „Kohomologie der Schemata“

Johannes Loher

29. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In der folgenden Ausarbeitung zum Vortrag „Čech-Kohomologie“ im Seminar „Kohomologie der Schemata“ im Sommersemester 2014 unter Leitung von Prof. Dr. Walter Gubler und Jascha Smacka wird die Čech-Kohomologie von Garben abelscher Gruppen auf topologischen Räumen bei einer gegeben Überdeckung untersucht. Das Hauptresultat wird sein, dass die Čech-Kohomologie im Falle einer quasikohärenten Garbe abelscher Gruppen auf einem noetherschen separierten Schema bei einer gegeben affinen Überdeckung schon mit der gewöhnlichen Garbenkohomologie übereinstimmt. Wir folgen dabei im Wesentlichen der Quelle [1].

[1] Hartshorne 1977

1. Separierte Morphismen

1.1 Definition. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Der **Diagonalmorphismus** ist der eindeutige Morphismus $\Delta\colon X \to X \times_Y X$, dessen Komposition mit den Projektionen $p_1, p_2\colon X \times_Y X \to X$ die Identität auf X ist.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Der Morphismus f heißt **separiert**, wenn der Diagonalmorphismus eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall heißt X **separiert** über Y. Ein Schema X heißt **separiert**, wenn es separiert über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ist.

1.2 Proposition. Sei X eine separiertes Schema. Seien U und V affine offene Unterschemata von X. Dann ist $U \cap V$ ebenfalls ein affines offenes Unterschema von X.

Beweis. [Liu06, Proposition 3.3.6] □

2. Čech-Kohomologie

2.1 Lemma/Definition (Čech-Komplex)**.** Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, wobei I eine wohlgeordnete Indexmenge ist, das heißt I ist total geordnet und für jede Teilmenge S von I gibt es ein kleinstes Element in S. Für alle $p \in \mathbb{N}$ und $i_0, \ldots, i_p \in I$ führen wir die Notation

$$U_{i_0,\ldots,i_p} \coloneqq U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$$

ein. Sei weiter $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Wir definieren nun den **zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ gehörenden Čech-Komplex** $C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \coloneqq \prod_{i_0 < \ldots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}),$$

das heißt ein Element $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ist durch Angabe von Elemente

$$\alpha_{i_0,\ldots,i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p})$$

für alle $(p+1)$-Tupel $i_0 < \ldots < i_p \in I$ bestimmt. Ist $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, so definieren wir das Symbol $\alpha_{i_0,\ldots,i_p}$ Aus praktischen Gründen für alle $i_0, \ldots, i_p \in I$ (und nicht nur für $i_0 < \ldots < i_p$), indem wir

$$\alpha_{i_0,\ldots,i_p} \coloneqq 0$$

setzen, falls es $j \neq k \in \{0, \ldots, p\}$ mit $i_j = i_k$ gibt und

$$\alpha_{i_0,\ldots,i_p} \coloneqq \operatorname{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(i_0),\ldots,\sigma(i_p)},$$

falls die Indizes alle disjunkt sind. Dabei ist σ die Permutation mit $\sigma(i_0) < \ldots < \sigma(i_p)$.

Wir definieren die Korandabbildungen durch

$$d^p \colon C^p \to C^{p+1},\ \alpha \mapsto d^p(\alpha) \coloneqq \left(\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}} \right)_{i_0,\ldots,i_{p+1}},$$

wobei die Notation $\hat{i}_k$ bedeutet, dass wir i_k weglassen. Wir müssen nun zeigen, dass für alle $p \in \mathbb{N}$ schon $d^{p+1} \circ d^p = 0$ gilt.

Beweis. Sei $\alpha \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(d^{p+1}d^p(\alpha))_{i_0,\dots,i_{p+2}} &= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k(d^p\alpha)_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k\Bigg(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}} \\
&\qquad + \sum_{j=k+1}^{p+2}(-1)^{j-1}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}}\Bigg)\Bigg|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}} \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+k}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}} \\
&\quad \underbrace{+\sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j=k+1}^{p+2}(-1)^{j+k-1}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+2}}}}_{=:\,a} \\
&= \sum_{j=0}^{p+2}\sum_{k=j+1}^{p+2}(-1)^{j+k}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,\dots,i_{p+2}}} + a \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j=k+1}^{p+2}(-1)^{j+k}\alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_{p+2}}|_{U_{i_0,\dots,\dots,i_{p+2}}}}_{=-a} + a \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Also ist $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tatsächlich ein Komplex. □

2.2 Definition (Čech-Kohomologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X. Für eine Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ auf X definieren wir die **zur Überdeckung $\mathfrak{U}$ gehörende** p-te **Čech-Kohomologiegruppe** von $\mathcal{F}$ als

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \coloneqq H^p(C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

Wir erhalten offenbar für alle $p \in \mathbb{N}$ einen Funktor

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, -)\colon \operatorname{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Ab}\,.$$

2.3 Warnung. Ist X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ ein offene Überdeckung von X und

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X, so erhalten wir im Allgemeinen keine lange exakte Sequenz von Čech-Kohomologiegruppen, das heißt, die Funktoren $\check{H}^p(\mathfrak{U}, -)$ bilden keinen δ-Funktor. Besteht $\mathfrak{U}$ zum Beispiel nur aus der einzelnen offenen Menge X, so folgt dies daraus, dass der globale Schnitte Funktor $\Gamma(X, -)$ im Allgemeinen nicht exakt ist.

2.4 Beispiel (Kohomologie der eindimensionalen Sphäre)**.** Sei S^1 die eindimensionale Sphäre und $\underline{\mathbb{Z}}$ die zu $\mathbb{Z}$ gehörige konstante Garbe. Sei weiter $\mathfrak{U}$ die offene Überdeckung von S^1, die aus zwei offenen Halbkreisen U und V besteht, die sich an beiden Enden überlappen, das heißt $U \cap V$ besteht aus zwei kleinen Intervallen. Dann gilt.

$$
\begin{aligned}
C^0(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}) &= \Gamma(U, \underline{\mathbb{Z}}) \times \Gamma(V, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\
C^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}) &= \Gamma(U \cap V, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so gilt weiter $d^0((a,b)) = (b-a, b-a)$, also

$$\ker(d^0) \cong \operatorname{im}(d^0) \cong \mathbb{Z}.$$

Also gilt $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$ und $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.

2.5 Lemma. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, wobei I eine wohlgeordnete Indexmenge ist, und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Dann gilt $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Beweis. Es gilt $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker(d^0)$. Für alle $\alpha \in C^0$ und $i < j \in I$ gilt

$$d^0(\alpha)_{ij} = \alpha_j|_{U_{ij}} - \alpha_i|_{U_{ij}}.$$

Für $\alpha \in \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ gilt also für alle $i < j \in I$

$$\alpha_j|_{U_{ij}} = \alpha_i|_{U_{ij}},$$

das heißt, für alle $i \in I$ gibt es genau ein $\alpha' \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ mit $\alpha'|_{U_i} = \alpha_i$. Dann ist die Abbildung

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}),\ \alpha \mapsto \alpha'$$

offenbar ein Gruppenisomorphismus. □

2.6 Definition („Garbifizierter“ Čech-Komplex)**.** Seien X, $\mathfrak{U}$ und $\mathcal{F}$ wie oben. Für V offen in X sei $j_V \colon V \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Wir konstruieren nun einen Komplex $\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ von Garben abelscher Gruppen. Für $p \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{i_0 < \ldots < i_p} j_{U_{i_0,\ldots,i_p}*}(\mathcal{F}|_{U_{i_0,\ldots,i_p}}).$$

Die Randabbildung $d^p \colon \mathcal{C}^p \to \mathcal{C}^{p+1}$ definieren wir analog zur Definition des Čech-Komplexes zur Überdeckung $\mathfrak{U}$. Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt nach Konstruktion $\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

2.7 Lemma. Seien X, $\mathfrak{U}$ und $\mathcal{F}$ wie oben. Dann ist der Komplex $\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$, das heißt es gibt einen Morphismus $\varepsilon \colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0$ mit der Eigenschaft, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \ldots$$

exakt ist.

Beweis. Durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_V \colon \mathcal{F}(V) &\to \left(\prod_{i \in I} j_{U_i*}(\mathcal{F}|_{U_i})(V) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}|_{U_i}\left(j_{U_i}^{-1}(V)\right) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}|_{U_i}(V \cap U_i) = \prod_{i \in I} \mathcal{F}(V \cap U_i) \right) \\ s &\mapsto (s|_{V \cap U_i})_{i \in I} \end{aligned}$$

erhalten wir einen Morphismus $\varepsilon \colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Nun gilt für alle V offen in X, alle $s \in \ker(\varepsilon)(V)$ und alle $i \in I$ schon $s|_{V \cap U_i} = 0$. Da die $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von X ist, folgt mit dem Garbenaxiom für $\mathcal{F}$, dass $s = 0$ gilt. Es gilt also $\ker(\varepsilon) = 0$, was die Exaktheit an der ersten Stelle zeigt.

Es genügt, die Exakheit auf allen offenen Teilengen von X nachzuprüfen, sei also V offen in X. Der Morphismus d_V^0 ist durch

$$\begin{aligned} d_V^0 \colon \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) &\to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V) \\ (s_i)_{i \in I} &\mapsto (s_{i_1}|_{U_{i_0 i_1} \cap V} - s_{i_0}|_{U_{i_0 i_1} \cap V})_{i_0 < i_1 \in I} \end{aligned}$$

gegeben, also gilt offensichtlich $\mathrm{im}(\varepsilon_V) \subset \ker(d_V^0)$. Sei nun $(s_i)_{i\in I} \in \ker(d_V^0)$, das heißt, für alle $i_0 < i_1 \in I$ gilt $s_{i_1}|_{U_{i_0 i_1}\cap V} - s_{i_0}|_{U_{i_0 i_1}\cap V} = 0$ und damit $s_{i_1}|_{U_{i_0 i_1}\cap V} = s_{i_0}|_{U_{i_0 i_1}\cap V}$. Nach dem Garbenaxiom für $\mathcal{F}$ gibt es also ein $s \in \mathcal{F}(V)$ mit $s|_{U_i\cap V} = s_i$, es gilt also $(s_i)_{i\in I} \in \mathrm{im}(\varepsilon_V)$ und damit gilt $\ker(d_V^0) \subset \mathrm{im}(\varepsilon)$. Insgesamt erhalten wir also $\ker(d_V^0) = \mathrm{im}(\varepsilon)$ und damit die Exaktheit an der zweiten Stelle.

Um die Exaktheit an den restlichen Stellen zu zeigen, genügt es, die die Exaktheit auf den Halmen zu prüfen. Für $p \in \mathbb{N}$ wissen wir bereits, dass $\mathrm{im}(d_x^p) \subset \ker(d_x^{p+1})$ gilt. Sei nun $\alpha_x \in \ker(d_x^{p+1})$, das heißt α_x wird also von $\alpha \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V)$ repräsentiert, wobei V eine offene Umgebung von x in X ist, die wir so klein wählen können, dass $V \subset U_j$ für ein $j \in I$ gilt. Für alle $i_0, \dots, i_p \in I$ gilt dann

$$V \cap U_{i_0,\dots,i_p} = V \cap U_{j,i_0,\dots,i_p}.$$

Deswegen können wir ein Element $\beta \in \mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})(V)$ durch

$$\beta_{i_0,\dots,i_p} := \alpha_{j,i_0,\dots,i_p}$$

definieren. Wegen $\alpha \in \ker(d_V^{p+1})$ gilt

$$0 = (d_V^{p+1}(\alpha))_{j,i_0,\dots,i_{p+1}} = \alpha_{i_0,\dots,i_{p+1}}|_{U_{j,i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V} + \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k+1}\alpha_{j,i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}}|_{U_{j,i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V}$$

und damit

$$\alpha_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \alpha_{i_0,\dots,i_{p+1}}|_{U_{j,i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V} = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k}\alpha_{j,i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}}|_{U_{j,i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V}.$$

Daraus folgt

$$(d_V^p\beta)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\beta_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}|_{U_{i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V}} = \alpha_{i_0,\dots,i_{p+1}},$$

das heißt es gilt $d_V^p(\beta) = \alpha$ und damit auch $d_x^p(\beta_x) = \alpha_x$. Es folgt $\alpha_x \in \mathrm{im}(d_x^p)$ und damit $\ker(d_x^{p+1}) \subset \mathrm{im}(d_x^p)$. Insgesamt erhalten wir also $\ker(d_x^{p+1}) = \mathrm{im}(d_x^p)$ und damit die Exaktheit an den restlichen Stellen. □

2.8 Proposition. Seien X und $\mathfrak{U}$ wie oben und sei $\mathcal{F}$ eine welke Garbe abelscher Gruppen. Für alle $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt dann $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 2.7 ist der Komplex $\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ welk ist, ist für alle $i_0, \dots, i_p$ auch $\mathcal{F}|_{U_{i_0,\dots,I_p}}$ welk. Das direkte Bild von welken Garben ist wieder welk und ebenso ist das Produkt von welken Garben wieder welk, also ist $\mathcal{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ für alle $p \in \mathbb{N}$ welk. Demnach können wir diese Auflösung verwenden, um die Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ zu bestimmen. Da $\mathcal{F}$ welk ist, gilt also für alle $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$0 = H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))) = \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

□

2.9 Lemma. Seien X und $\mathfrak{U}$ wie oben, dann gibt es für alle $p \in \mathbb{N}$ einen kanonischen Morphismus

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F})$$

der natürlich in $\mathcal{F}$ ist, das heißt wir erhalten eine natürliche Transdormation

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, -) \Longrightarrow H^p(X, -).$$

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und sei $\mathcal{I}^\cdot$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$. Nach Satz A.1 gibt es einen bis auf Homotopie eindeutigen Morphismus von Komplexen $\mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{C}) \to \mathcal{I}^\cdot$, der auf $\mathcal{F}$ die Identität induziert. Durch Anwenden der Funktoren $\Gamma(X, -)$ und H^p erhalten wir den gewünschten Morphismus. $\square$

2.10 Theorem. Sei X ein noethersches separiertes Schema und $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine affine offene Überdeckung von X, wobei I eine wohlgeordnete Indexmenge ist. Sei weiter $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Dann sind die kanonischen Morphismen aus Lemma 2.9 für alle $p \in \mathbb{N}$ Isomorphismen

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F}).$$

Beweis. Für $p = 0$ haben wir nach Lemma 2.5 schon einen Isomorphismus. Nach [Har77, Corrolar III.3.6] können wir $\mathcal{F}$ in eine welke, quasikohärente Garbe $\mathcal{G}$ einbetten. Wir setzen $\mathcal{R} := \mathcal{G}/\mathcal{F}$ und erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{R} \to 0$$

von Garben. Für alle $i_0 < \ldots < i_p \in I$ ist $U_{i_0,\ldots,i_p}$ nach Proposition 1.2 affin. Da $\mathcal{F}$ quasikohärent ist, erhalten wir nach [Har77, PropositionII.5.6] eine exakte Sequenzen

$$0 \to \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \mathcal{G}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \mathcal{R}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to 0$$

von abelschen Gruppen. Indem wir Produkte bilden, erkennen wir, dass auch die entsprechende Sequenz von Čech-Komplexen

$$0 \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to \mathcal{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \to 0$$

exakt ist. Also erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Čech-Kohomologiegruppen. Da $\mathcal{G}$ welk ist, gilt $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$ für alle $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wir erhalten also eine exakte Sequenz

$$0 \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to 0$$

von abelschen Gruppen und für alle $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Indem wir den Fall $p = 0$ verwenden, erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^0(X, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^0(X, \mathcal{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{G}) \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{R}) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\varphi_1 \colon \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$ der kanonische Morphismus aus Lemma 2.9. Es folgt sofort, dass φ ein Ismomorphismus ist. Nun ist $\mathcal{R}$ jedoch also Kokern eines Morphismus von quasikohärenten Garben nach [Har77, Proposition II.5.7] auch quasikohärent. Wir haben die Behauptung bereits für $p = 1$ gezeigt. Sei nun also die Behaptung bereits für ein $p > 0$ bewiesen. Da $\mathcal{G}$ welk ist, erhalten wir mit der langen exakten Kohomologiesequenz auch Isomorphismen

$$H^p(X, \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}(X, \mathcal{F}).$$

Damit folgt nun

$$\check{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{R}) \overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\cong} H^p(X, \mathcal{R}) \cong H^{p+1}(X, \mathcal{F}),$$

das heißt, die Behauptung gilt auch für $p + 1$. Mit Induktion folgt die Behauptung nun für alle $p \in \mathbb{N}$. $\square$

Anhang A.

Injektive Auflösungen und Homotopie

A.1 Satz. Sei $\mathcal{A}$ eine ablesche Kategorie und seien A und B in $\mathcal{A}$. Ist $\varepsilon : A \to I^{\cdot}$ eine beliebige Auflösung und $\eta : B \to J^{\cdot}$ eine injektive Auflösung und ist $u : A \to B$ ein Morphismus, so gibt es einen bis auf Homotopie eindeutigen Morphismus von Komplexen $f : I^{\cdot} \to I^{\cdot}$, mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "u"'] & I^{\cdot} \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\eta"'] & J^{\cdot} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Da ε^0 ein Monomorphismus ist und J^0 injektiv ist, gibt es einen Morphismus $f^0 : I^0 \to J^0$ mit $f^0\varepsilon^0 = \eta^0 u$. Sei nun $n \geq 0$ und bereits ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon^0"] \arrow[d, "u"] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] \arrow[d, "f^0"] & \dots \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \arrow[d, "f^n"] \\ B \arrow[r, "\eta^0"] & J^0 \arrow[r, "d_J^0"] & \dots \arrow[r, "d_J^{n-1}"] & J^n \end{tikzcd}$$

konstruiert. Außerdem sei $\overline{f^n} : \operatorname{coker}(d_I^n) \to \operatorname{coker}(d_J^n)$ der von f^n induzierte Morphismus. Der von d_J^n induzierte Morphismus $\overline{d_I^n} : \operatorname{coker}(d_I^n) \to I^{n+1}$ ist ein Monomorphismus. Deswegen, und weil J^{n+1} injektiv ist, gibt es einen Morphismus $f^{n+1} : I^{n+1} \to J^{n+1}$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^n"] & \operatorname{coker}(d_I^n) \arrow[r, hook, "\overline{d_I^n}"] \arrow[d, "\overline{f^n}"] & I^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ J^n \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}(d_J^n) \arrow[r, hook, "\overline{d_J^n}"] & J^{n+1} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Insgesamt erhalten wir also einen Morphismus von Komplexen $f : I^{\cdot} \to J^{\cdot}$ wie gewünscht. Um zu zeigen, dass dieser bis auf Homotopie eindeutig bestimmt ist, genügt es zu zeigen, dass aus $u = 0$ bereits $f \sim 0$ folgt. Dazu setzen wir $J^{-2} = 0$, $f^{-1} = u = 0 : I^{-1} = A \to B = J^{-1}$ und $s^{-1} = s^0 = 0$. Seien nun bereits $s^i : I^i \to J^{i-1}$ für $0 \leq i \leq n$ konstruiert mit $f^i = d_J^{i-1}s^i + s^{i+1}d_I^i$ für $0 \leq i \leq n-1$, wie durch folgendes Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{tikzcd} & \dots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{n-1}"'] \arrow[d, "f^{n-1}"] & I^n \arrow[r] \arrow[dl, "s^n"'] \arrow[d, "f^n"] & I^{n+1} \\ J^{n-2} \arrow[rr] & & J^{n-1} \arrow[r] & J^n & \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(f^n - d_J^{n-1}s^n)d_I^{n-1} &= f^n d_I^{n-1} - d_J^{n-1}s^n d_I^{n-1} \\
&= f^n d_I^{n-1} - d_J^{n-1}(f^{n-1} - d_J^{n-2}s^{n-1}) \\
&= f^n d_I^{n-1} - d_J^{n-1}f^{n-1} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

also faktorisiert $f^n - d_J^{n-1}s^n$ über $\operatorname{coker}(d_I^{n-1})$. Da J^n injektiv ist, gibt es also einen Morphismus $s^{n+1} : I^{n+1} \to J^{n+1}$, der das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
I^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^n - d_J^{n-1}s^n"'] & \operatorname{coker}(d_I^{n-1}) \arrow[r, hook] \arrow[dl] & I^{n+1} \arrow[dll, dashed, "s^{n+1}"] \\
J^n & &
\end{tikzcd}
$$

kommutativ macht. Nun gilt also $s^{n+1}d_I^n = f^n - d_J^{n-1}s^n$. $\square$

Literatur

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977. ISBN: 9780387902449. URL: `http://books.google.de/books?id=3rtX9t-nnvwC`.

[Liu06] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2006. ISBN: 9780191547805. URL: `http://books.google.de/books?id=uaLKdA0PxS4C`.