Universität Regensburg

Fakultät für Mathematik

Serres Tor-Formel und Reduktion auf die Diagonale

Masterarbeit

von

Johannes Loher

(Matrikelnummer 1 576 123)

Betreuer: Prof. Dr. Moritz Kerz

27.09.2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Schnittmultiplizitäten aus der algebraischen Geometrie im Sinne von Pierre Samuel stimmen mit einer *Euler-Poincaré-Charakteristik* von bestimmten Tor-Funktoren überein. Die moderne Schnitttheorie verwendet diese *Tor-Formel* deswegen für die Definition des Schnittprodukts (siehe zum Beispiel [Ful98]).

Diese Arbeit folgt in vielen Punkten den Ausführungen von Jean-Pierre Serre in [Ser00], allerdings bleiben etliche Resultate unerwähnt, die bereits aus der kommutativen Algebra bekannt sein sollten. Stattdessen werden die für die Tor-Formel wichtigen Resultate in größerem Detail behandelt.

Kapitel 1 gibt einen Überblick über Samuels Begriff der Multiplizität eines eines endlich erzeugten Moduls M bezüglich Ideals $\mathfrak{q}$, das eine bestimmte Endlichkeitsbedingung erfüllt, nämlich $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$. Dazu werden das *Hilbert-Polynom* und das *Samuel-Polynom* betrachtet. Dies führt schließlich zum Hauptresultat der Dimensionstheorie von endlich erzeugten Moduln über lokalen noetherschen Ringen, nämlich, dass der Grad des Samuel-Polynoms bezüglich eines solchen Moduls gerade der Dimension des Moduls entspricht.

Darauf folgend führt Kapitel 2 den *Koszul-Komplex* ein. Ein wesentliches Resultat ist dabei, dass man die Funktoren $\operatorname{Tor}_i^A(A/\mathbf{x}, M)$ für einen A-Modul M im Fall, dass $\mathbf{x}$ eine M-reguläre Folge ist, mit Hilfe eines bestimmten Koszul-Komplexes berechnen kann. Für das Hauptergebnis dieses Kapitels betrachten wir die Samuel-Multiplizität $e_\mathfrak{q}(M, r)$ des über dem noetherschen lokalen Ring A endlich erzeugten Moduls M bezüglich des Ideals $\mathfrak{q}$ von A. Dabei muss die Endlichkeitsbedingung $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$ erfüllt sein. In diesem Fall gilt dann

$$e_\mathfrak{q}(M, r) = \sum_{i=0}^{r} \ell_A(H_i(\mathbf{x}, M)), \tag{1}$$

wobei $H_i(\mathbf{x}, M)$ die Homologiemoduln des zu M und $\mathbf{x}$ gehörigen Koszul-Komplexes sind.

In Kapitel 3 soll die Tor-Formel untersucht werden. Dazu werden zunächst die *Gruppe der Zykel* eines Rings und die Multiplizität eines Moduls eingeführt.

Die *Reduktion auf die Diagonale* stellt für fast alle folgenden Ergebnisse ein sehr wichtiges Prinzip dar, deswegen wird sie beispielhaft im Fall affiner irreduzibler Varietäten erläutert. Mit ihrer Hilfe wird in diesem Fall die *Dimensionsformel* der algebraischen

Geometrie gezeigt: Sind V und W irreduzible Untervarietäten eines affinen Raums und ist T eine irreduzible Komponente von $V \cap W$, so gilt

$$\operatorname{codim}(T) \leq \operatorname{codim}(V) + \operatorname{codim}(W).$$

Da die Reduktion auf die Diagonale im Folgenden auch im allgemeineren Fall von formalen Potenzreihenringen über einem Körper benötigt wird, wird nun der dafür notwendige Begriff des *vervollständigten Tensorprodukts* $\widehat{\otimes}$ eingeführt und die Formel für die Reduktion auf die Diagonale in diesem Fall gezeigt:

$$\operatorname{Tor}_i^A(M, N) \cong \operatorname{Tor}_i^C(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N, A), \tag{2}$$

wobei k ein Körper, A ein formaler Potenzreihenring über k und $C = A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} A$ ist und M und N endlich erzeugte A-Moduln sind.

Mit Hilfe von Gleichung (2) kann man für einen formalen Potenzreihenring A der Dimension n über einem Körper k und zwei endlich erzeugte A-Moduln M und N mit $\ell_A(M \otimes_k N) < \infty$ Folgendes zeigen:

(a) $\dim(M) + \dim(N) \leq n$ (*Dimensionsformel*).

(b) $\chi^A(M, N) := \sum_{i=0}^n \ell_A(\operatorname{Tor}_i^A(M, N)) \geq 0$.

(c) $\chi^A(M, N) = 0$ genau dann, wenn $\dim(M) + \dim(N) < n$.

Unter Verwendung von *Cohens Struktursatz* für vollständige reguläre lokale Ringe gleicher Charakteristik kann man dieses Theorem nun auch auf den Fall verallgemeinern, dass A ein regulärer Ring gleicher Charakteristik ist. Dies führt zu der Vermutung, dass die Aussage sogar für beliebige regulärer Ringe gültig ist. Abschnitt 3.8 gibt einen kurzen Überblick darüber, welche Resultate in diesem Zusammenhang bereits bewiesen wurden.

Praktischerweise genügt aber der Fall regulärer Ringe gleicher Charakteristik für die Anwendung in der algebraischen Geometrie, denn ist X eine nicht singuläre algebraische Varietät über einem Körper k und ist W eine irreduzible Untervarietät von X, so ist der lokale Ring von X bei W regulär von gleicher Charakteristik.

Seien U und V irreduzible Untervarietäten von X und W eine irreduzible Komponente von $U \cap V$, in der sich U und V eigentlich schneiden, das heißt

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(X) + \dim(W).$$

Seien außerdem A, A_U und A_V die lokalen Ringe von X, U und V bei W. Bezeichnet $i(X, U \cdot V, W)$ die Schnittmultiplizität im Sinne von Samuel, dann gilt

$$i(X, U \cdot V, W) = \chi^A(A_V, A_W). \tag{3}$$

Diese Formel wird mit Hilfe von Gleichung (1) und der Reduktion auf die Diagonale bewiesen. Wie bereits zu Beginn erwähnt, wird Gleichung (3) in der modernen Schnitttheorie sogar als Definition der Schnittmultiplizität verwendet.

Die Eigenschaften dieser Schnittmultiplizität folgen nun auf natürliche Weise aus den Eigenschaften der Tor-Funktoren. So folgt zum Beispiel die Kommutativität direkt aus der Symmetrie der Tor-Funktoren und die Assoziativität aus der Assoziativitätsformel für Tor-Funktoren, die durch zwei Spektralsequenzen gegeben ist.

Alle Ringe, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind kommutative Ringe mit Eins.

1 Hilbert-Samuel-Polynome

In diesem Kapitel wollen wir Samuels Begriff der Multiplizität eines Moduls bezüglich eines Ideals einführen. Insbesondere werden wir das Hauptresultat der Dimensionstheorie endlich erzeugter Moduln über noetherschen lokalen Ringen beweisen.

1.1 Ganzzahlige Polynome

Definition 1.1 (Binomialpolynom)**.** Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir das ***k*-te Binomialpolynom** durch

$$Q_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(X - k + i) \in \mathbb{Q}[X].$$

Offensichtlich bilden die Binomialpolynome eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}[X]$.

Definition 1.2 (Differenzenoperator)**.** Sei Z eine abelsche Gruppe und $A \subset \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A.$$

Dann definieren wir den **Differenzenoperator** Δ durch:

$$\begin{aligned}\Delta\colon \operatorname{map}(A, Z) &\to \operatorname{map}(A, Z)\\ f &\mapsto (\Delta f\colon A \to Z,\, n \mapsto f(n+1) - f(n))\end{aligned}$$

Offensichtlich ist Δ ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

Lemma 1.3. *Sei Z eine abelsche Gruppe, $A \subset \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft*

$$n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$$

und $f\colon A \to Z$ eine Abbildung. Sind $n \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $n - r \in A$, so gilt

$$\Delta^r f(n-r) = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{r}{p} f(n-p).$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über r. Ist $r = 0$, so gilt

$$\Delta^r f(n-r) = f(n) = (-1)^0\binom{0}{0} f(n-0) = \sum_{p=0}^{r}(-1)^p\binom{r}{p} f(n-p).$$

Sei also nun $r > 0$ und die Behauptung für $r-1$ bewiesen, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta^r f(n-r) &= \Delta^{r-1}\Delta f(n-r) \\
&= \Delta^{r-1}\Delta f((n-1)-(r-1)) \\
&= \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p\binom{r-1}{p}\Delta f((n-1)-p) \\
&= \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p\binom{r-1}{p}\Big(f((n-1)-p+1)-f((n-1)-p)\Big) \\
&= \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p\binom{r-1}{p}f(n-p)-\sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p\binom{r-1}{p}f(n-p-1) \\
&= \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p\binom{r-1}{p}f(n-p)+\sum_{p=1}^{r}(-1)^p\binom{r-1}{p-1}f(n-p) \\
&= \sum_{p=0}^{r}(-1)^p\left(\binom{r-1}{p}+\binom{r-1}{p-1}\right)f(n-p) \\
&= \sum_{p=0}^{r}(-1)^p\binom{r}{p}f(n-p).
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.4. *Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ gilt*

$$\Delta Q_k = Q_{k-1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\Delta Q_k(n) = Q_k(n+1) - Q_k(n) = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} = Q_{k-1}(n).$$

□

Definition/Lemma 1.5 (Ganzzahliges Polynom)**.** *Ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ heißt **ganzzahlig**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:*

(a) f ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Binomialpolynomen Q_k.

(b) Für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f(z) \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass $f(z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \geq z_0$.

(d) Δf besitzt die Eigenschaft aus (a) und es gibt mindestens ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) \in \mathbb{Z}$.

Ist f solch ein Polynom, dann bezeichnen wir mit $e_k(f)$ den Koeffizienten von Q_k in der Darstellung $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_k Q_k$.

Beweis der Äquivalenz. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) und (a) $\Rightarrow$ (d) sind klar.

Sei also nun (d) wahr. Weil die Binomialpolynome Q_k eine Basis von $\mathbb{Q}[X]$ bilden, gibt es eine eindeutige Darstellung $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k Q_k$ mit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$. Es gilt also $\Delta f = \sum_{k>0} e_k Q_{k-1}$ und weil auch die Darstellung von Δf eindeutig ist und (a) von Δf erfüllt wird, folgt $e_k \in \mathbb{Z}$ für $k > 0$. Da es mindestens ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) \in \mathbb{Z}$ gibt, folgt auch $e_0 \in \mathbb{Z}$. Also sind (a) und (d) äquivalent.

Um die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, nutzen wir Induktion über den Grad von f. Ist f vom Grad 0, so ist f konstant und wegen (c) gilt dann $f \in \mathbb{Z}$ und damit (a). Sei also nun f vom Grad $d > 0$ und die Behauptung wahr für Polynome vom Grad $< d$. Offensichtlich gilt $\deg \Delta f < \deg f$ und auch Δf erfüllt (c). Also wird (a) von Δf erfüllt und damit (d) von f. $\square$

Ist $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein ganzzahliges Polynom, dann gilt offensichtlich $e_k(f) = e_{k-1}(\Delta f)$ für $k > 0$. Insbesondere ist $e_k(f)$ für $\deg(f) \leq k$ das konstante Polynom $\Delta^k f$ und es gilt

$$f(X) = e_k(f)\frac{X^k}{k!} + g(X),$$

wobei $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(g) < k$. Ist $\deg(f) = k$, so gilt

$$f(n) \sim e_k(f)\frac{n^k}{k!} \qquad \text{für } n \to \infty,$$

das heißt $f(n)$ und $e_k(f)\frac{n^k}{k!}$ verhalten sich asymptotisch gleich. Es folgt, dass $e_k(f) > 0$ genau dann erfüllt ist, wenn es ein $z_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $f(z) > 0$ für alle $z \geq z_0$ gilt.

1.2 Polynomartige Funktionen

Im Folgenden sei $A \subset \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A.$$

Definition 1.6 (Polynomartige Funktion)**.** Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{Z}$ heißt **polynomartig**, wenn es ein Polynom $P_f \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, das folgende Eigenschaft erfüllt: Es gibt ein $m \in A$ mit der Eigenschaft $f(n) = P_f(n)$ für alle $n \in A$ mit $n \geq m$. Gibt es solch ein Polynom, so ist es offensichtlich eindeutig durch f bestimmt und ganzzahlig. Ist k der Grad von P_f, so sagen wir auch, dass f Grad k hat und schreiben $e_l(f)$ an Stelle von $e_l(P_f)$.

Lemma 1.7. *Sei $f\colon A \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung und $r \in \mathbb{N}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist polynomartig vom Grad $\leq r$.

(b) Δf ist polynomartig vom Grad $\leq r-1$.

(c) Für alle $s \geq r+1$ gibt es ein $m \in A$, sodass für alle $n \geq m$ gilt: $\Delta^s f(n) = 0$.

Beweis. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) sind klar.

Sei also nun (b) wahr. Sei $R = \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k(P_{\Delta f}) Q_{k+1}$, dann ist R vom Grad $\leq r$ und es gilt $\Delta R = P_{\Delta f}$. Betrachte die Abbildung $g\colon A \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto f(z) - R(z)$. Für z groß genug gilt dann:

$$\Delta g(z) = \Delta f(z) - \Delta R(z) = \Delta f(z) - P_{\Delta f}(z) = 0.$$

Also gibt es ein $e_0 \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass für alle z groß genug $g(z) = e_0$ und damit auch $f(z) = R(z) + e_0$ gilt. Also ist f polynomartig vom Grad $\leq r$.

Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) folgt durch Induktion über r und Verwendung der Implikation (b) $\Rightarrow$ (a). □

1.3 Das Hilbert-Polynom

Im Folgenden sei nun $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n$ ein graduierter Ring mit folgenden Eigenschaften:

(a) H_0 ist artinsch.

(b) H wird von H_0 und einer endlichen Anzahl an Elementen $x_1, \ldots, x_r \in H_1$ erzeugt.

Dann gilt $H \cong H_0[X_1, \ldots, X_r]/I$, wobei $I \subset H_0[X_1, \ldots, X_r]$ ein homogenes Ideal ist. Weil $H_0[X_1, \ldots, X_r]$ nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch ist, ist es demnach auch H.

Sei $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter H-Modul. Der Modul M ist noethersch, also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ der H-Untermodul $M_{\geq n} := \bigoplus_{i \geq n} M_n$ endlich erzeugt. Nun gilt aber $M_n \cong M_{\geq n}/M_{\geq n+1}$, also ist auch M_n ein endlich erzeugter H-Modul und damit auch ein endlich erzeugter $(H/\operatorname{Ann}(M_n))$-Modul. Es gilt $\bigoplus_{n \geq 1} H_n \subset \operatorname{Ann}(M_{\geq n}/M_{\geq n+1})$, also haben wir folgende Surjektion:

$$H_0 \cong H/\left(\bigoplus_{n \geq 1} H_n\right) \twoheadrightarrow H/\operatorname{Ann}(M_{\geq n}/M_{\geq n+1}) \cong H/\operatorname{Ann}(M_n).$$

Folglich ist M_n ein endlich erzeugter H_0-Modul und somit artinsch und noethersch. Demnach ist er von endlicher Länge und wir können folgende Abbildung definieren:

$$\begin{aligned} \chi(M, -)\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \chi(M, n) := \ell_{H_0}(M_n) \end{aligned}$$

Dabei ist $\ell_{H_0}(M_n)$ die Länge von M_n als H_0-Modul.

Theorem 1.8 (Hilbert)**.** *Die Abbildung $\chi(M,-)$ ist polynomartig vom Grad $\leq r-1$.*

Beweis. Da jeder endlich erzeugte graduierte H-Modul auch ein endlich erzeugter graduierter $H_0[X_1,\dots,X_r]$-Modul ist, dürfen wir $H = H_0[X_1,\dots,X_r]$ annehmen.

Wir beweisen die Behauptung nun durch Induktion über r.

Im Fall $r = 0$ ist M ein endlich erzeugter H_0-Modul und damit von endlicher Länge. Es gilt $M_n = 0$ für große n und damit ist $\chi(M,-)$ polynomartig vom Grad $-\infty < -1$.

Wir nehmen nun an, dass $r > 0$ gilt und die Behauptung für $r-1$ bereits gezeigt wurde. Seien N der Kern und R der Kokern des Endomorphismus $\Phi\colon M \to M$, $m \mapsto X_r \cdot m$. Das sind graduierte Moduln und wir erhalten die folgenden exakten Sequenzen:

$$0 \to N_n \to M_n \xrightarrow{\Phi} M_{n+1} \to R_{n+1} \to 0$$

Es folgt

$$\Delta\chi(M,n) = \chi(M,n+1) - \chi(M,n) = \chi(R,n+1) - \chi(N,n).$$

Wegen $X_rR = X_rN = 0$ können wir R und N als graduierte $H_0[X_1,\dots,X_{r-1}]$-Moduln betrachten. Nach der Induktionsvoraussetzung sind dann $\chi(R,-)$ und $\chi(N,-)$ polynomartige Funktionen vom Grad $\leq r-2$, also auch $\Delta\chi(M,-)$. Nach Lemma 1.7 ist dann $\chi(M,-)$ polynomartig vom Grad $\leq r-1$. □

Notation. Das Polynom $P_{\chi(M,-)}$ heißt **Hilbert-Polynom** und wird auch mit $Q(M)$ bezeichnet. Seinen Wert bei einer ganzen Zahl n schreiben wir als $Q(M,n)$. Offensichtlich gilt $Q(M) = 0$ genau dann, wenn $\ell_{H_0}(M) < \infty$.

1.4 Das Samuel-Polynom

Im Folgenden sei A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.

Lemma 1.9. *Es gilt $\ell_A(M) < \infty$ genau dann, wenn alle Elemente in* $\operatorname{Supp}(M)$ *maximale Ideale sind.*

Beweis. [Eis04, Corollary 2.17]. □

Sei nun $\mathfrak{q}$ ein Ideal von A. Da A noethersch ist, wird $\mathfrak{q}$ von r Elementen $x_1,\dots,x_r$ erzeugt. Wir nehmen zusätzlich Folgendes an:

$$\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty.$$

Wegen $\operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}) = \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}M)$ ist das nach Lemma 1.9 äquivalent zu:

$$\text{Alle Elemente in } \operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}) \text{ sind maximale Ideale.} \tag{1.1}$$

Sei weiter (M_i) eine $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierung auf M, das heißt

$$\begin{aligned}
&M = M_0 \supset M_1 \supset \dots, \\
&M_i \supset \mathfrak{q} M_{i-1}, \\
&M_i = \mathfrak{q} M_{i-1} \text{ für große i.}
\end{aligned}$$

Wegen $V(\mathfrak{q}) = V(\mathfrak{q}^n)$ für alle $n > 0$ sind die A-Moduln $M/\mathfrak{q}^n M$ von endlicher Länge und wegen $M_n \supset \mathfrak{q}^n M$ auch die A-Moduln M/M_n. Demnach ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
f_M \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \ell_A(M/M_n)
\end{aligned}$$

wohldefiniert.

Theorem 1.10 (Samuel)**.** *Die Abbildung f_M ist polynomartig vom Grad $\leq r$.*

Beweis. Wir können $\operatorname{Ann}(M) = 0$ annehmen: Sei $A' = A/\operatorname{Ann}(M)$ und $\mathfrak{q}'$ das Bild von $\mathfrak{q}$ in A'. Dann ist (M_i) auch eine $\mathfrak{q}'$-stabile Filtrierung auf M als A'-Modul und es gilt offensichtlich $\ell_A(M/M_n) = \ell_{A'}(M/M_n)$ und $\operatorname{Ann}_{A'}(M) = 0$.

Nach Gleichung (1.1) sind dann alle Elemente in $V(\mathfrak{q})$ maximale Ideale, also ist $A/\mathfrak{q}$ artinsch. Der zu $\mathfrak{q}$ assoziierte graduierte Ring

$$H = \operatorname{gr}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$$

wird von $H_0 = A/\mathfrak{q}$ und den Elementen $x_1, \dots, x_r$ erzeugt. Weiter ist

$$\operatorname{gr}(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n/M_{n+1}$$

ein graduierter H-Modul. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_{n+1} = \mathfrak{q} M_n$ für alle $n \geq n_0$, also wird $\operatorname{gr}(M)$ von

$$M_0/M_1 \oplus \dots \oplus M_{n_0}/M_{n_0+1}$$

erzeugt. Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist wegen der Injektion $M_i/M_{i+1} \hookrightarrow M/M_{i+1}$, und weil M/M_{i+1} noethersch ist, auch M_i/M_{i+1} noethersch. Insbesondere ist also M_i/M_{i+1} ein endlich erzeugter A-Modul und wegen $\mathfrak{q} \subset \operatorname{Ann}(M_i/M_{i+1})$ auch ein endlich erzeugter $A/\mathfrak{q}$-Modul. Also ist $\operatorname{gr}(M)$ ebenfalls ein endlich erzeugter $A/\mathfrak{q}$-Modul und damit insbesondere ein endlich erzeugter $\operatorname{gr}(A)$-Modul. Nach Theorem 1.8 ist dann die Abbildung $\chi(\operatorname{gr}(M), -)$ polynomartig vom Grad $\leq r - 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta f_M(n) &= \ell_A(M/M_{n+1}) - \ell_A(M/M_n) \\
&= \ell_A(M_n/M_{n+1}) \\
&= \ell_{A/\mathfrak{q}}(M_n/M_{n+1}) \\
&= \chi(\operatorname{gr}(M), n),
\end{aligned}$$

also ist Δf_M polynomartig vom Grad $\leq r - 1$ und nach Lemma 1.7 ist f_M dann polynomartig vom Grad $\leq r$. □

Bemerkung. Das Polynom P_{f_M} heißt **Samuel-Polynom** und wird im Folgenden auch mit $P((M_i))$ bezeichnet. Seinen Wert bei einer ganzen Zahl n schreiben wir auch als $P((M_i), n)$. Der Beweis von Theorem 1.10 zeigt

$$\Delta P((M_i)) = Q(\mathrm{gr}(M)), \tag{1.2}$$

wobei $\mathrm{gr}(M)$ der zur Filtrierung (M_i) assoziierte graduierte Modul ist.

Ist (M_i) die $\mathfrak{q}$-adische Filtrierung auf M, so schreiben wir auch $P_\mathfrak{q}(M)$ anstatt $P((\mathfrak{q}^i M))$. Das nächste Lemma liefert einen Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und dem $\mathfrak{q}$-adischen Fall:

Lemma 1.11. *Es gilt*

$$P_\mathfrak{q}(M) = P((M_i)) + R,$$

wobei $R \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $\leq \deg(P_\mathfrak{q}(M)) - 1$ ist, dessen führender Koeffizient ≥ 0 ist.

Beweis. Sei $m \geq 0$, sodass $M_{n+1} = \mathfrak{q}M_n$ für alle $n \geq m$. Für alle $n \geq 0$ gilt dann

$$\mathfrak{q}^{n+m}M \subset M_{n+m} = \mathfrak{q}^n M_m \subset \mathfrak{q}^n M \subset M_n,$$

also gilt für große n:

$$P_\mathfrak{q}(M, n+m) \geq P((M_i), n+m) \geq P_\mathfrak{q}(M, n) \geq P((M_i), n).$$

Demnach müssen $P_\mathfrak{q}(M)$ und $P((M_i))$ den gleichen führenden Term haben. Außerdem folgt für große n auch $P_\mathfrak{q}(M, n) - P((M_i), n) \geq 0$, das bedeutet der führende Koeffizient von $P_\mathfrak{q}(M) - P((M_i))$ muss ≥ 0 sein. $\square$

Proposition 1.12. *Ist*

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln mit $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$, $\ell_A(N/\mathfrak{q}N) < \infty$ und $\ell_A(P/\mathfrak{q}P) < \infty$, dann gilt

$$P_\mathfrak{q}(M) = P_\mathfrak{q}(N) + P_\mathfrak{q}(P) - R,$$

wobei $R \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $\leq \deg(P_\mathfrak{q}(N)) - 1$ ist, dessen führender Koeffizient ≥ 0 ist.

Beweis. Sei $N_i = \mathfrak{q}^i M \cap N$. Nach dem Lemma von Artin-Rees (siehe [Eis04, Lemma 5.1]) ist (N_i) eine $\mathfrak{q}$-stabile Filtrierung auf N und wir haben für alle $n \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to P/\mathfrak{q}^n P \to 0.$$

Demnach gilt für alle $n \geq 0$

$$\ell_A(M/\mathfrak{q}^n M) = \ell_A(N/N_n) + \ell_A(P/\mathfrak{q}^n P),$$

also

$$P_\mathfrak{q}(M) = P_\mathfrak{q}((N_i)) + P_\mathfrak{q}(P).$$

Nach Lemma 1.11 gilt

$$P((N_i)) = P_\mathfrak{q}(N) + R,$$

wobei $R \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $\leq \deg(P_\mathfrak{q}(N)) - 1$ ist, dessen führender Koeffizient ≥ 0 ist. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Notation. Ist d eine ganze Zahl $\geq \deg(P_\mathfrak{q}(M))$, dann bezeichnen wir mit $e_\mathfrak{q}(M, d)$ die ganze Zahl $\Delta^d P_\mathfrak{q}(M)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} e_\mathfrak{q}(M, d) &= 0 \qquad \text{falls } d > \deg(P_\mathfrak{q}(M)) \\ e_\mathfrak{q}(M, d) &\geq 1 \qquad \text{falls } d = \deg(P_\mathfrak{q}(M)) \end{aligned}$$

Ist $d = \deg(P_\mathfrak{q}(M))$, so gilt außerdem

$$P_\mathfrak{q}(M, n) \sim e_\mathfrak{q}(M, d)\frac{n^d}{d!} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Korollar 1.13. *Ist*

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln mit $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$, $\ell_A(N/\mathfrak{q}N) < \infty$ und $\ell_A(P/\mathfrak{q}P) < \infty$, dann gilt für $d \geq \deg(P_\mathfrak{q}(M))$:

$$e_\mathfrak{q}(M, d) = e_\mathfrak{q}(N, d) + e_\mathfrak{q}(P, d).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Proposition 1.12. $\square$

Proposition 1.14. *Sind $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ Ideale von A mit $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$ und $\ell_A(M/\mathfrak{q}'M) < \infty$ und gilt zusätzlich*

$$\operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}) = \operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}'),$$

dann gilt

$$\deg(P_\mathfrak{q}(M)) = \deg(P_{\mathfrak{q}'}(M)).$$

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 1.10 können wir $\operatorname{Ann}(M) = 0$ annehmen, also gilt

$$V(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s\} = V(\mathfrak{q}'),$$

wobei die $\mathfrak{m}_i$ maximale Ideal von A sind. Dann gibt es eine ganze Zahl $m > 0$ mit $\mathfrak{q}^m \subset \mathfrak{q}'$ und für alle $n \geq 0$ folgt $\mathfrak{q}^{nm} \subset (\mathfrak{q}')^n$. Für große n gilt demnach

$$P_\mathfrak{q}(M, mn) \geq P_{\mathfrak{q}'}(M, n)$$

und es folgt $\deg P_\mathfrak{q}(M) \geq \deg P_{\mathfrak{q}'}(M)$. Durch Vertauschen der Rollen von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ erhalten wir auch $\deg P_\mathfrak{q}(M) \leq \deg P_{\mathfrak{q}'}(M)$ und damit $\deg P_\mathfrak{q}(M) = \deg P_{\mathfrak{q}'}(M)$. $\square$

1.5 Dimensionstheorie noetherscher lokaler Ringe

Im Folgenden sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei außerdem $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ ein Ideal in A mit $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$.

Wir bezeichnen mit $d(M)$ den Grad von $P_\mathfrak{q}(M)$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{q}$ mit den obigen Eigenschaften, denn ist $\mathfrak{q}'$ ein weiteres solches Ideal, dann gilt nach Lemma 1.9

$$\operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}') = \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}'M) = \{\mathfrak{m}\} = \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}M) = \operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{q}).$$

Nach Proposition 1.14 folgt also $\deg P_\mathfrak{q}(M) = \deg P_{\mathfrak{q}'}(M)$.

Weiter bezeichnen wir mit $s(M)$ das Infimum der natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass es $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$ gibt, sodass $\ell_A(M/(x_1, \ldots, x_n)M)$ endlich ist.

Wir wollen nun $\dim(M) = d(M) = s(M)$ zeigen. Dies ist das Hauptresultat der Dimensionstheorie endlich erzeugter Moduln über noetherschen lokalen Ringen.

Lemma 1.15. *Es gilt* $d(M) \leq s(M)$.

Beweis. Nach der Definition von $s(M)$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A mit $\ell_A(M/\mathfrak{a}M) < \infty$, das von $s(M)$ Elementen erzeugt wird. Demnach gilt

$$d(M) = \deg P_\mathfrak{q}(M) = \deg P_\mathfrak{a}(M)$$

und nach Theorem 1.10 folgt $d(M) \leq s(M)$. □

Lemma 1.16. *Es gilt* $\dim(M) \leq d(M)$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $d(M)$.

Im Fall $d(M) = 0$ ist $P_\mathfrak{q}(M)$ konstant. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, dass $P_\mathfrak{q}(M, n) = \ell_A(M/\mathfrak{q}^n M)$ für alle $n \geq k$ gilt, also gilt $\ell_A(M/\mathfrak{q}^n M) = \ell_A(M/\mathfrak{q}^{n+1} M)$ für alle $n \geq k$. Betrachte nun folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \to \mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M \to M/\mathfrak{q}^{n+1} M \to M/\mathfrak{q}^n M \to 0$$

Da die Länge auf kurzen exakten Sequenzen additiv ist, folgt also $\ell_A(\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M) = 0$ und damit $\mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1} M = 0$, also $\mathfrak{q}^n M \cong \mathfrak{q}^{n+1} M$. Wegen $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m} = \operatorname{Rad}(A)$ gilt wegen des Nakayama-Lemmas $\mathfrak{q}^n M = 0$ für alle $n \geq k$. Sei nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$, dann gilt $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}_A(M) \supset \mathfrak{q}^k$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, folgt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ und damit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{q}M)$. Nach Voraussetzung ist aber $\ell_A(M/\mathfrak{q}M) < \infty$, mit Lemma 1.9 folgt also, dass $\mathfrak{p}$ maximal ist. Demnach sind alle Primideale von $A/\operatorname{Ann}_A(M)$ maximal und folglich gilt

$$\dim(M) = \dim(A/\operatorname{Ann}_A(M)) = 0.$$

Sei nun also $d(M) = n \geq 1$ und die Behauptung bereits für $n-1$ gezeigt. Sei nun $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Supp}(M)$ minimal mit $\dim(M) = \dim(A/\mathfrak{p}_0)$. Dann gibt es einen Untermodul N von M mit $N \cong A/\mathfrak{p}_0$ (siehe [Ser00, Chapter I, Theorem 1]). Nach Proposition 1.12 gilt dann $d(N) \leq d(M)$, wir können also $M = A/\mathfrak{p}_0$ annehmen. Angenommen es gilt $\dim(M) > d(M)$. Dann gibt es eine echt aufsteigende Kette von Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k$$

mit $k > d(M)$. Sei $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, dann gilt

$$\dim(M/xM) \geq k - 1 > d(M) - 1.$$

Betrachte nun den Homomorphismus

$$\cdot x \colon M \to M,\, m \mapsto xm.$$

Da $\mathfrak{p}_0$ prim ist, ist $M = A/\mathfrak{p}_0$ ein Integritätsring und damit ist $\cdot x$ injektiv. Somit erhalten wir folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0.$$

Nach Proposition 1.12 gilt also $d(M/xM) \leq d(M) - 1$ und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$d(M) - 1 < \dim(M/xM) \leq d(M/xM) \leq d(M) - 1.$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss bereits $\dim(M) \leq d(M)$ gelten. □

Lemma 1.17. *Es gilt* $s(M) \leq \dim(M)$.

Beweis. Wir benutzen Induktion über $n = \dim(M)$ (nach Lemma 1.16 wissen wir, dass $\dim(M) < \infty$ gilt).

Im Fall $n = 0$ gilt $\dim(A/\mathfrak{p}) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. Folglich sind alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ maximale Ideale und damit ist M nach Lemma 1.9 von endlicher Länge. Wir erhalten also $s(M) = 0$.

Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für $n-1$ bereits gezeigt. Seien $\mathfrak{p}_i$ die Primideale in $\mathrm{Supp}(M)$ mit $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = n$. Diese sind minimale Elemente von $\mathrm{Supp}(M)$, folglich sind es nur endlich viele (siehe [Ser00, Chapter II, Theorem 1]). Wegen $n \geq 1$ sind sie nicht maximal und nach dem *Lemma zur Vermeidung von Primidealen* können wir $x \in \mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i wählen (siehe [Rob98a, Proposition 1.1.5]). Dann gilt offenbar $\dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1$. Andererseits gilt wegen der Definition von $s(M)$ auch $s(M/xM) \geq s(M) - 1$ und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$s(M) - 1 \leq s(M/xM) \leq \dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1.$$

Folglich gilt $s(M) \leq \dim(M)$. □

Theorem 1.18. *Es gilt* $\dim(M) = d(M) = s(M)$.

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 1.15 bis 1.17. □

2 Der Koszul-Komplex

Wir geben nun einen Überblick über Koszul-Komplexe. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist ein Theorem, das es uns ermöglicht Samuels Multiplizität mit Hilfe der Euler-Poincaré-Charakteristik eines bestimmten Koszul-Komplexes zu berechnen.

Im Folgenden sei A ein Ring.

2.1 Der einfache Fall

Definition 2.1. Ist $x \in A$, so bezeichnen wir mit $K(x)$ folgenden Komplex:

$$\begin{aligned} K_i(x) &= 0 \qquad \text{für } i \neq 0,1 \\ K_1(x) &= A \\ K_0(x) &= A \end{aligned}$$

Die Abbildung $\quad d\colon K_1(x) \to K_0(x) \quad$ ist die Multiplikation mit x

Aus Notationsgründen bezeichnen wir $1 \in K_1(x)$ euch mit e_x.

Ist M ein A-Modul, dann bezeichnen wir den Tensorprodukt-Komplex $K(x) \otimes_A M$ mit $K(x, M)$. Wir bezeichnen den i-ten Homologie-Modul von $K(x, M)$ mit $H_i(x, M)$. Ist $x \in A$ und M ein A-Modul, so gilt:

$$\begin{aligned} K_n(x, M) &= 0 \qquad \text{falls } n \neq 0,1 \\ K_0(x, M) &= K_0(x) \otimes_A M \cong M \\ K_1(x, M) &= K_1(x) \otimes_A M \cong M \end{aligned}$$

Die Randabbildung

$$d\colon K_1(x, M) \to K_0(x, M)$$

ist durch die folgende Formel gegeben:

$$d(e_x \otimes m) = xm \qquad \text{für } m \in M.$$

Die Homologie-Moduln von $K(x, M)$ sind

$$\begin{aligned} H_i(x, M) &= 0 \qquad \text{falls } i \neq 0,1, \\ H_0(x, M) &= M/xM, \\ H_1(x, M) &= \operatorname{Ann}_M(x) = \ker(x_M\colon M \to M,\ m \mapsto xm). \end{aligned}$$

Proposition 2.2 (Künneth-Formel für Koszul-Komplexe)**.** *Sei $x \in A$ und L ein Komplex von A-Moduln. Dann ist für jedes $p \geq 0$ die Sequenz*

$$0 \to H_0(x, H_p(L)) \to H_p(K(x) \otimes_A L) \to H_1(x, H_{p-1}(L)) \to 0$$

exakt.

Beweis. Die natürliche Inklusion $A \to K(x)$ liefert einen Monomorphismus von Komplexen

$$L = A \otimes_A L \to K(x) \otimes_A L.$$

Außerdem erhalten wir durch die natürliche Projektion $K(x) \to K_1(x) = A$ einen Epimorphismus von Komplexen

$$K(x) \otimes_A L \to L[-1],$$

der uns insgesamt die kurze exakte Sequenz

$$0 \to L \xrightarrow{i} K(x) \otimes_A L \xrightarrow{p} L[-1] \to 0$$

liefert. Also erhalten wir folgende lange exakte Homologiesequenz:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_p(L) \to H_p(K(x) \otimes_A L) \to H_p(L[-1]) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(L) \to \cdots$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (K(x) \otimes_A L)_p &= \bigoplus_{i+j=p} K_i(x) \otimes_A L_j \\ &= K_0(x) \otimes_A L_p \oplus K_1(x) \otimes_A L_{p-1} \end{aligned}$$

und die Randabbildung $d\colon (K(x) \otimes_A L)_p \to (K(x) \otimes_A L)_{p-1}$ ist durch

$$\begin{aligned} d(x_0 \otimes y_p + x_1 \otimes y_{p-1}) &= d(x_0) \otimes y_p + x_0 \otimes d(y_p) + d(x_1) \otimes y_{p-1} - x_1 \otimes d(y_{p-1}) \\ &= x_0 \otimes d(y_p) + x \cdot x_0 \otimes y_{p-1} - x_1 \otimes d(y_{p-1}) \end{aligned}$$

gegeben. Ist $[c] \in H_p(L[-1])$, so gilt $\partial([c]) = [d(\hat{c})] \in H_{p-1}(L)$, wobei $\hat{c}$ ein Element aus $(K(x) \otimes_A L)_p$ mit $p(\hat{c}) = c$ ist. Ohne Einschränkung sei $\hat{c} = 0 + e_x \otimes c$. Wegen $c \in Z_p(L[-1])$ folgt dann

$$\partial([c]) = [d(\hat{c})] = [d(0 + e_x \otimes c)] = [x \cdot e_x \otimes c - e_x \otimes d(c)] = x[e_x \otimes c],$$

also ist $\partial\colon (H_{p-1}(L) = H_p(L[-1])) \to H_{p-1}(L)$ durch die Multiplikation mit x gegeben. Demnach erhalten wir aus der langen exakten Homologiesequenz die folgenden kurzen exakten Sequenzen:

$$0 \to X_p \to H_p(K(x) \otimes_A L) \to Y_{p-1} \to 0$$

Dabei sind X_p und Y_p durch

$$\begin{aligned} X_p &= \operatorname{coker}(\cdot x\colon H_p(L) \to H_p(L)) = H_0(x, H_p(L)) \\ Y_p &= \ker(\cdot x\colon H_p(L) \to H_p(L)) \quad = H_1(x, H_p(L)) \end{aligned}$$

gegeben. □

Definition 2.3 (azyklischer Komplex)**.** Sei M ein A-Modul und L ein Komplex von A-Moduln mit $L_p = 0$ für $p < 0$. Dann heißt L **azyklischer Komplex** auf M, falls $H_p(L) = 0$ für $p > 0$ und $H_0(L) = M$, also falls

$$\cdots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

eine Auflösung von M ist.

Korollar 2.4. *Sei M ein A-Modul, L ein auf M azyklischer Komplex und $x \in A$ kein Nullteiler auf M, also $\operatorname{Ann}_M(x) = 0$. Dann ist $K(x) \otimes_A L$ ein azyklischer Komplex auf M/xM.*

Beweis. Aus Proposition 2.2 folgt:

$$\begin{aligned} &H_p(K(x) \otimes_A L) = 0 \qquad \text{für } p > 1 \\ &H_1(K(x) \otimes_A L) = H_1(x, M) = \operatorname{Ann}_M(x) = 0 \\ &H_0(K(x) \otimes_A L) = H_0(x, M) = M/xM \end{aligned}$$

□

2.2 Der allgemeine Koszul-Komplex

Definition 2.5. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A. Mit $K(\mathbf{x})$ oder auch mit $K(x_1, \ldots, x_r)$ bezeichnen wir folgenden Tensorprodukt-Komplex:

$$K(\mathbf{x}) = K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_r)$$

Lemma 2.6. *Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A. Dann ist $K_p(\mathbf{x})$ der freie A-Modul, der von den Elementen der Form*

$$e_{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge e_{x_{i_p}} = e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-}mal} \qquad \text{mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq r$$

erzeugt wird. Insbesondere gilt also

$$K_p(\mathbf{x}) \cong \bigwedge\nolimits^p (A^r).$$

Die Randabbildung $d\colon K_p(\mathbf{x}) \to K_{p-1}(\mathbf{x})$ ist durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned} &d(e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-}mal}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-}mal}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei verwenden wir die Konvention, dass das Symbol unter „$\widehat{\ }$“ weggelassen wird.

Beweis. Für $p \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{I}_p^r = \{I \subset \{1,\dots,r\} \mid \#I = p\}$. Wir haben folgendes zu zeigen:

$$K_p(\mathbf{x}) = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p^r} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right).$$

Dies beweisen wir durch Induktion über r. Im Fall $r = 1$ gilt $\mathcal{I}_0^1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I}_1^1 = \{\{1\}\}$ und für $p \notin \{0,1\}$ gilt $\mathcal{I}_p^1 = \emptyset$. Damit folgt:

$$K_0(\mathbf{x}) = K_0(x_1) = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_0^1} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right)$$

$$K_1(\mathbf{x}) = K_1(x_1) = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_1^1} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right)$$

$$K_p(\mathbf{x}) = K_p(x_1) = 0 = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p^1} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \quad \text{für } p \notin \{0,1\}$$

Für die Randabbildung $d\colon K_1(x_1) \to K_0(x_1)$ im Grad 1 gilt

$$\begin{aligned} d(e_{x_{i_1}}) &= x_1 \cdot 1 \\ &= (-1)^{1+1} x_1 \widehat{e_{x_{i_1}}} \otimes 1 \\ &= \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(1-1+1)\text{-mal}}. \end{aligned}$$

In den anderen Graden ist die Randabbildung nach Definition 2.1 immer 0 und auch die Formel aus Gleichung (2.1) ergibt 0.

Sei also nun $r > 1$ und die Behauptung für alle $s \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq s < r$ bereits bewiesen. Sei außerdem $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{r-1})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} K_p(\mathbf{x}) &= \bigoplus_{i+j=p} K_i(\mathbf{x}') \otimes_A K_j(x_r) \\ &= \bigoplus_{j \in \{0,1\}} K_{p-j}(\mathbf{x}') \otimes_A K_j(x_r) \\ &= \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p^{r-1}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r-1\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \otimes_A K_0(x_r) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_{p-1}^{r-1}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r-1\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \otimes_A K_1(x_r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p^{r-1}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \\
&\quad \oplus \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_{p-1}^{r-1}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I \cup \{r\}} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus (I \cup \{r\})} K_0(x_i) \right) \right) \\
&= \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{I}_p^r \\ r \notin I}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \\
&\quad \oplus \bigoplus_{\substack{I \in \mathcal{I}_p^r \\ r \in I}} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right) \\
&= \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \right).
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Randabbildung $d\colon K_p(\mathbf{x}) \to K_{p-1}(\mathbf{x})$. Dabei unterscheiden wir die zwei Fälle $r \in \{i_1, \dots, i_p\}$ und $r \notin \{i_1, \dots, i_p\}$. Im ersten Fall gilt:

$$\begin{aligned}
&d(e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-1-p)\text{-mal}} \otimes \underbrace{1}_{\in K_0(x_r)}) \\
&= d(e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-1-p)\text{-mal}}) \otimes 1 + (-1)^{p+1} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-1-p)\text{-mal}} \otimes \underbrace{d(1)}_{=0} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-mal}} \right) \otimes 1 \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}}.
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall können wir ohne Einschränkung $r = i_p$ annehmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&d(e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-mal}}) \\
&= d(e_y x_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{((r-1)-(p-1))\text{-mal}}) \otimes e_{x_{i_p}} \\
&\quad + (-1)^{p+1} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-mal}} \otimes d(e_{x_{i_p}}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}} \right) \otimes e_{x_{i_p}} \\
&\quad + (-1)^{p+1} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-mal}} \otimes (x_{i_p} \cdot 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}} \\
&\quad + (-1)^{p+1} x_{i_p} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_{p-1}}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Definition 2.7 (Koszul-Komplex)**.** Ist $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A und M ein A-Modul, so bezeichnen wir den Tensorprodukt-Komplex $K(\mathbf{x}) \otimes_A M$ mit $K(\mathbf{x}, M)$ oder auch $K(x_1, \ldots, x_r; M)$. Wegen Lemma 2.6 gilt

$$K_p(\mathbf{x}, M) = \bigoplus_{I \in \mathcal{I}_p^r} \left(\left(\bigotimes_{i \in I} K_1(x_i) \right) \otimes_A \left(\bigotimes_{i \in \{1,\ldots,r\} \setminus I} K_0(x_i) \right) \otimes_A M \right)$$

und die Randabbildung $K_p(\mathbf{x}, M) \to K_{p-1}(\mathbf{x}, M)$ ist durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned}
&d(e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p)\text{-mal}} \otimes m) \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_{x_{i_k}}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_p}} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{(r-p+1)\text{-mal}} \otimes m
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen den p-ten Homologiemodul von $K(\mathbf{x}, M)$ mit $H_p(\mathbf{x}, M)$. Ab nun bezeichnen wir mit $\mathbf{x}$ und $(x_1, \ldots, x_r)$ je nach Kontext auch das von den Elementen $x_1, \ldots, x_r$ erzeugte Ideal in A. Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
H_0(\mathbf{x}, M) &= M / \left(\bigoplus_{i=1}^{r} x_i M \right) = M / \mathbf{x} M \\
H_r(\mathbf{x}, M) &= \{ m \in M \mid x_i m = 0 \text{ für alle } i \}
\end{aligned}$$

Bemerkung. Wenn wir den zu Grunde liegenden Ring A nennen wollen, dann schreiben wir $K^A(\mathbf{x})$, $H_p^A(\mathbf{x})$, $K^A(\mathbf{x}, M)$ und $H_p^A(\mathbf{x}, M)$. Tatsächlich ist $K(\mathbf{x}, M)$ und damit auch $H_p(\mathbf{x}, M)$ aber nicht vom Grundring A abhängig, sondern nur von der abelschen Gruppe M und den Gruppenhomomorphismen $\cdot x_i \colon M \to M$, $m \mapsto xm$, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.8. *Seien A und B zwei Ringe und sei M sowohl ein A-Modul, als auch ein B-Modul. Weiter seien $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$ eine Familie von Elementen aus B mit der Eigenschaft, dass die Multiplikation mit x_i und y_i für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ jeweils den gleichen Gruppenhomomorphismus ψ_i auf M liefert. Dann gibt es einen Isomorphismus vom Komplexen von abelschen Gruppen*

$$K^A(\mathbf{x}, M) \cong K^B(\mathbf{y}, M),$$

der natürlich in M ist.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} K_p^A(\mathbf{x}, M) &= K_p^A(\mathbf{x}) \otimes_A M \\ &\cong A^{\binom{r}{p}} \otimes_A M \\ &\cong M^{\binom{r}{p}} \\ &\cong B^{\binom{r}{p}} \otimes_B M \\ &\cong K_p^B(\mathbf{y}) \otimes_B M \\ &= K_p^B(\mathbf{y}, M). \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass diese Isomorphismen mit den Randabbildungen von $K^A(\mathbf{x}, M)$ und $K^B(\mathbf{y}, M)$ kompatibel sind. Es gibt eine bijektive Abbildung

$$\phi_p \colon \mathcal{I}_p \to \left\{1, \ldots, \binom{r}{p}\right\}.$$

Die Randabbildungen von $K^A(\mathbf{x}, M)$ und $K^B(\mathbf{y}, M)$ induzieren dann jeweils beide die Abbildung

$$\begin{aligned} d \colon M^{\binom{r}{p}} &\to M^{\binom{r}{p-1}} \\ (0, \ldots, 0, \underbrace{m}_{\phi_p(\{i_1,\ldots,i_p\})\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0) &\mapsto \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} (0, \ldots, 0, \underbrace{\psi_j(m)}_{\phi_{p-1}(\{i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p\})\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Die Natürlichkeit ist klar. □

Definition 2.9 (Reguläre Folge)**.** Sei M ein A-Modul. Eine Familie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ von Elementen aus A heißt ***M*-reguläre Folge**, falls für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt, dass x_i kein Nullteiler auf $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ ist.

Proposition 2.10. *Sei M ein A-Modul und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine M-reguläre Folge, dann gilt $H_p(\mathbf{x}, M) = 0$ für alle $p > 0$.*

Beweis. Für $r = 1$ ist die Behauptung richtig, denn $\mathrm{Ann}_M(x_1) = H_1(x_1, M) = 0$ bedeutet gerade, dass x_1 kein Nullteiler auf M ist.

Sei also nun $r > 1$ und die Behauptung wahr für $r - 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} &H_p(x_1, \ldots, x_{r-1}; M) = 0 \qquad \text{für } p \neq 0, \\ &H_0(x_1, \ldots, x_{r-1}; M) = M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M, \end{aligned}$$

also ist $K(x_1, \ldots, x_{r-1}; M)$ ein azyklischer Komplex auf $M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M$. Nach Voraussetzung ist x_r kein Nullteiler auf $M/(x_1, \ldots, x_{r-1})M$, also ist

$$K(\mathbf{x}, M) = K(x_r) \otimes_A K(x_1, \ldots, x_{r-1}; M)$$

nach Korollar 2.4 ein azyklischer Komplex auf $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ und damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A, dann ist

$$K(\mathbf{x}, -)\colon \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Ch}(\operatorname{Mod}_A)$$

ein Funktor. Dieser ist exakt, denn $K_p(\mathbf{x})$ ist der freie A-Modul vom Rang $\binom{r}{p}$ und damit insbesondere flach. Demnach ist $(H_p(\mathbf{x}, -) = H_p \circ K(\mathbf{x}, -))_{p \in \mathbb{N}}$ ein homologischer δ-Funktor von Mod_A nach Mod_A. Des Weiteren gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\psi_0\colon H_0(\mathbf{x}, -) \to (A/\mathbf{x}) \otimes_A -$$

und weil $\left(\operatorname{Tor}_p^A(A/\mathbf{x}, -)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ ein universeller δ-Funktor von von Mod_A nach Mod_A ist, setzt sich ψ_0 eindeutig zu einem Morphismus ψ von δ-Funktoren fort.

Korollar 2.11. *Sei* $\mathbf{x}$ *eine* A*-reguläre Folge. Dann ist*

$$\psi\colon (H_p(\mathbf{x}, -))_{p \in \mathbb{N}} \to \left(\operatorname{Tor}_p^A(A/\mathbf{x}, -)\right)_{p \in \mathbb{N}}$$

ein Isomorphismus von δ*-Funktoren.*

Beweis. Nach Proposition 2.10 ist $H_p(\mathbf{x}, A) = 0$ für $p > 0$ und es gilt $H_0(\mathbf{x}, A) = A/\mathbf{x}$. Also ist $K(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}, A)$ ein azyklischer Komplex auf $A/\mathbf{x}$ und damit ist

$$\cdots \to K_1(\mathbf{x}) \to K_0(\mathbf{x}) \to A/\mathbf{x} \to 0$$

eine Auflösung von $A/\mathbf{x}$. Da $K_p(\mathbf{x})$ der freie A-Modul vom Rang $\binom{r}{p}$ ist, ist diese Auflösung frei. Insbesondere ist sie projektiv und damit folgt die Behauptung. $\square$

Proposition 2.12. *Sei* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ *eine Familie von Elementen aus* A *und* M *ein* A*-Modul. Für alle* $p \in \mathbb{Z}$ *gilt dann*

$$\mathbf{x} \subset \operatorname{Ann}_A(H_p(\mathbf{x}, M))$$

und

$$\operatorname{Ann}_A(M) \subset \operatorname{Ann}_A(H_p(\mathbf{x}, M)).$$

Beweis. Sei $B = A[X_1, \dots, X_r]$. Wir definieren eine B-Modul-Struktur auf A durch $X_i a = 0$ für alle $a \in A$ und und eine B-Modul-Struktur auf M durch $X_i m = x_i m$ für alle $m \in M$. Nach Lemma 2.8 sind dann $K^A(\mathbf{x}, M)$ und $K^B(X_1, \dots, X_r; M)$ als Komplexe abelscher Gruppen isomorph. Da $(X_1, \dots, X_r)$ eine B-reguläre Folge ist, folgt also

$$H_p(\mathbf{x}, M) \cong H_p(X_1, \dots, X_r; M) \cong \operatorname{Tor}_p^B(B/(X_1, \dots, X_r), M) \cong \operatorname{Tor}_p^B(A, M).$$

Durch den Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow B$ wird auf $\operatorname{Tor}_p^B(A, M)$ eine A-Modulstruktur definiert, die offensichtlich mit der A-Modulstruktur von $H_p(\mathbf{x}, M)$ übereinstimmt. Also ist der obige Gruppenisomorphismus sogar ein Isomorphismus von A-Moduln. Insbesondere gilt für alle $a \in A$ mit $a \in \operatorname{Ann}_B(\operatorname{Tor}_p^B(A, M))$ auch $a \in \operatorname{Ann}_A(H_p(\mathbf{x}, M))$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}_B(\operatorname{Tor}_p^B(A, M)) &\supset \operatorname{Ann}_B(A) + \operatorname{Ann}_B(M)\\ &= (X_1, \ldots, X_r) + \operatorname{Ann}_B(M)\\ &\supset (X_1, \ldots, X_r) + \operatorname{Ann}_A(M) + (X_1 - x_1, \ldots, X_r - x_r)\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Sei M ein A-Modul und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ eine Familie von Elementen aus A.

Ist $S \subset A$ eine multiplikative Menge, so gilt $K(\mathbf{x}, M_S) \cong K(\mathbf{x}, M)_S$, denn die Funktoren $-_S \colon \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_{A_S}$ und $- \otimes_A A_S \colon \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_{A_S}$ sind natürlich isomorph.

Statten wir M und $K(\mathbf{x}, M)$ jeweils mit der $\mathbf{x}$-adischen Filtrierung aus, dann gilt $K(\mathbf{x}, \widehat{M}) \cong \widehat{K(\mathbf{x}, M)}$, denn

$$K_p(\mathbf{x}, \widehat{M}) \cong \bigoplus_{i=1}^{\binom{r}{p}} \widehat{M} = \prod_{i=1}^{\binom{r}{p}} \widehat{M} \cong \widehat{\prod_{i=1}^{\binom{r}{p}} M} \cong \widehat{\bigoplus_{i=1}^{\binom{r}{p}} M} \cong \widehat{K_p(\mathbf{x}, M)}$$

und dieser Isomorphismus ist offensichtlich kompatibel mit den Randabbildungen.

2.3 Die Filtrierung eines Koszul-Komplexes

Definition 2.13 (Euler-Poincaré-Charakteristik)**.** Sei A ein Ring und K ein beschränkter Komplex von A-Moduln. Ist $\ell_A(K_p) < \infty$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, so definieren wir die **Euler-Poincaré-Charakteristik** von K durch

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \ell_A(K_p).$$

Ist $\ell_A(H_p(K)) < \infty$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, so definieren wir sie durch

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \ell_A(H_p(K)).$$

Sind beide Voraussetzungen gegeben, so stimmen die beiden Definitionen überein, da die Länge additiv auf kurzen exakten Sequenzen ist.

Im Folgenden sei A ein noetherscher lokaler Ring, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ ein Ideal von A und M ein endlich erzeugter A-Modul mit $\ell_A(M/\mathbf{x}M) < \infty$. Die A-Moduln $H_p(\mathbf{x}, M)$ sind endlich erzeugt und für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(H_p(\mathbf{x}, M))$ gilt $\mathfrak{p} \supset \operatorname{Ann}_A(H_p(\mathbf{x}, M))$. Nach Proposition 2.12 gilt also insbesondere $\mathfrak{p} \supset \mathbf{x} + \operatorname{Ann}_A(M) = \operatorname{Ann}_A(M/\mathbf{x}M)$. Damit gilt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathbf{x}M)$, also ist $\mathfrak{p}$ nach Lemma 1.9 ein maximales Ideal und wieder mit Lemma 1.9 folgt $\ell_A(H_p(\mathbf{x}, M)) < \infty$.

Definition 2.14 (Euler-Poincaré-Charakteristik des Koszulkomplexes)**.** Wir definieren die **Euler-Poincaré-Charakteristik** zu $(\mathbf{x}, M)$ durch

$$\chi(\mathbf{x}, M) = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p \ell_A(H_p(\mathbf{x}, M)).$$

Das Samuel-Polynom $P_{\mathbf{x}}(M)$ ist nach Theorem 1.10 vom Grad $\leq r$ und es gilt

$$P_{\mathbf{x}}(M, n) = e_{\mathbf{x}}(M, r)\frac{n^r}{r!} + Q(n),$$

wobei Q ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad $< r$ ist.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die beiden ganzen Zahlen $\chi(\mathbf{x}, M)$ und $e_{\mathbf{x}}(M, r)$ übereinstimmen.

Theorem 2.15. *Es gilt* $\chi(\mathbf{x}, M) = e_{\mathbf{x}}(M, r)$*.*

Beweis. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Sei $K = K(\mathbf{x}, M)$. Wir definieren eine absteigende Filtrierung auf K durch
$$(F^i K)_p = \mathbf{x}^{i-p} K_p.$$
Wenn wir die Komplexe K und $F^i K$ jeweils als direkte Summe ihrer Komponenten K_p und $(F^i K)_p$ betrachten, dann ist $F^i K$ eine $\mathbf{x}$-stabile Filtrierung auf K.

2. Sei $\mathrm{gr}(A)$ der zur $\mathbf{x}$-adischen Filtrierung auf A gehörige graduierte Ring. Es gilt $\mathrm{gr}_0(A) = A/\mathbf{x}$ und $\mathrm{gr}_1(A) = \mathbf{x}/\mathbf{x}^2$. Seien $y_1, \ldots, y_r$ die Bilder von $x_1, \ldots, x_r$ in $\mathrm{gr}_1(A)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_r)$. Sei $\mathrm{gr}(M)$ der zur $\mathbf{x}$-adischen Filtrierung auf M gehörige graduierte $\mathrm{gr}(A)$-Modul. Dann gilt
$$\mathrm{gr}(K) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} F^i K / F^{i+1} K \cong K(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M)),$$
denn
$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}(K)_p &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (F^i K)_p / (F^{i+1} K)_p \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}^{i-p} K_p / \mathbf{x}^{i+1-p} K_p \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}^{i} K_p / \mathbf{x}^{i+1} K_p \\
&\cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}^{i} M^{\binom{r}{p}} / \mathbf{x}^{i+1} M^{\binom{r}{p}} \\
&\cong \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{x}^{i} M / \mathbf{x}^{i+1} M \right)^{\binom{r}{p}} \\
&= \mathrm{gr}(M)^{\binom{r}{p}} \\
&\cong K_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M))
\end{aligned}$$

und dieser Isomorphismus ist offensichtlich kompatibel mit den Randabbildungen der beiden Komplexe.

3. Wie im Beweis von Theorem 1.10 sieht man, dass $\mathrm{gr}(M)$ ein endlich erzeugter $\mathrm{gr}(A)$-Modul ist. Also sind auch die Homologiemoduln $H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M))$ endlich erzeugte $\mathrm{gr}(A)$-Moduln. Nach Proposition 2.12 gilt $\mathbf{y} \subset \mathrm{Ann}_{\mathrm{gr}(A)}(H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M)))$, also sind sie sogar endlich erzeugt über $\mathrm{gr}(A)/\mathbf{y} \cong A/\mathbf{x}$. Aus obiger Darstellung von $K_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M))$ erhält man, dass $\mathrm{Ann}_A(M)$ die Homologiemoduln $H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M))$ annulliert, also sind sie sogar endlich erzeugte $(A/(\mathbf{x}+\mathrm{Ann}_A(M)))$-Moduln. Nach dem gleichen Argument, das wir bereits für die Wohldefiniertheit der Euler-Poincaré-Charakteristik verwendet haben, folgt dann, dass die Homologiemoduln $H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M))$ alle endliche Länge haben.

4. Da $H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M)) = 0$ für $p \notin \{0, \dots, r\}$ und wegen

$$H_p(\mathbf{y}, \mathrm{gr}(M)) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_p(F^i K / F^{i+1} K)$$

gibt es ein $m \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass $H_p(F^i K / F^{i+1} K) = 0$ für alle $i > m$ und alle $p \in \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung können wir $m \geq r$ annehmen.

5. Wir zeigen nun $H_p(F^i K / F^{i+j} K) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, $i > m$ und $j \geq 0$ durch Induktion über j: Im Fall $j = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also nun $j \geq 1$ und die Behauptung für $j - 1$ bereits gezeigt. Wir betrachten folgende kurze exakte Sequenz von Komplexen:

$$0 \to F^{i+j-1} K / F^{i+j} K \to F^i K / F^{i+j} K \to F^i K / F^{i+j-1} K \to 0$$

Diese liefert uns folgende lange exakte Homologiesequenz:

$$\cdots \longrightarrow H_p(F^{i+j-1} K / F^{i+j} K) \longrightarrow H_p(F^i K / F^{i+j} K) \to H_p(F^i K / F^{i+j-1} K) \to H_{p-1}(F^{i+j-1} K / F^{i+j} K) \longrightarrow \cdots$$

Nach Voraussetzung ist $j \geq 1$, also ist $i + j - 1 > m$ und damit folgt nach Punkt 4 bereits $H_p(F^{i+j-1} K / F^{i+j} K) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $H_p(F^i K / F^{i+j-1} K) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$, das heißt wir erhalten für alle $p \in \mathbb{Z}$ die exakte Sequenz

$$0 \to H_p(F^i K / F^{i+j} K) \to 0,$$

also muss auch $H_p(F^i K / F^{i+j} K) = 0$ gelten.

6. Seien Z_p^i und B_p^i jeweils die Moduln der Zykel und Ränder in $(F^i K)_p$. Nach Punkt 5 gilt $H_p(F^i K / \mathbf{x}^j (F^i K)_p) = 0$ für alle $j \geq 0$ und $i > m$, also

$$Z_p^i \subset B_p^i + \mathbf{x}^j (F^i K)_p.$$

Damit folgt

$$Z_p^i \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_p^i + \mathbf{x}^j (F^i K)_p = \overline{B_p^i},$$

wobei $\overline{B_p^i}$ den Abschluss von B_p^i bezüglich der $\mathbf{x}$-adischen Topologie auf $(F^i K)_p$ bezeichnet. Wegen $\mathbf{x} \subset \mathfrak{m} = \mathrm{Rad}(A)$ ist jeder Untermodul eines endlich erzeugten A-Moduls bezüglich der $\mathbf{x}$-adischen Topologie abgeschlossen (siehe [Ser00, Chapter II, Part A, Corollary 4 nach Theorem 1]). Insbesondere ist also B_p^i abgeschlossen und damit folgt $Z_p^i \subset B_p^i$, also $H_p(F^i K) = 0$.

7. Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to F^i K \to K \to K/F^i K \to 0.$$

Diese induziert die folgende lange exakte Homologiesequenz:

$$\cdots \to H_p(F^i K) \to H_p(K) \to H_p(K/F^i K) \to H_{p-1}(F^i K) \to \cdots$$

Ist $i > m$, so ist $H_p(F^i K) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und es folgt, dass der natürliche Morphismus

$$H_p(\mathbf{x}, M) = H_p(K) \to H_p(K/F^i K)$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

8. Weil $M/\mathbf{x}M$ von endlicher Länge ist, sind nach Lemma 1.9 alle Elemente in $\mathrm{Supp}(M) \cap V(\mathbf{x})$ maximale Ideale. Wegen $V(\mathbf{x}^i) = V(\mathbf{x})$ gilt also nach Lemma 1.9 auch $\ell_A(M/\mathbf{x}^i M) < \infty$ und damit ist auch

$$(K/F^i K)_p \cong (M/\mathbf{x}^{i-p} M)^{\binom{r}{p}}$$

von endlicher Länge. Für $i > m$ folgt nach Punkt 7 also

$$\begin{aligned}
\chi(\mathbf{x}, M) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \ell_A(H_p(K/F^i K)) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \ell_A((K/F^i K)_p) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \ell_A\left((M/\mathbf{x}^{i-p} M)^{\binom{r}{p}}\right) \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \binom{r}{p} \ell_A((M/\mathbf{x}^{i-p} M))
\end{aligned} \tag{2.2}$$

9. Wenn i groß genug ist, können wir Gleichung (2.2) zu folgender Gleichung umschreiben:

$$\chi(\mathbf{x}, M) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \binom{r}{p} P_{\mathbf{x}}(M, i-p).$$

Nach Lemma 1.3 ist die rechte Seite dieser Gleichung durch

$$\Delta^r P_{\mathbf{x}}(M, i-r) = \Delta^r P_{\mathbf{x}}(M) = e_{\mathbf{x}}(M, r)$$

gegeben. □

Korollar 2.16. *Es gilt* $\dim(M) \leq r$. *Weiter gilt:*

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}, M) &> 0, \qquad \textit{falls } \dim(M) = r \\ \chi(\mathbf{x}, M) &= 0, \qquad \textit{falls } \dim(M) < r \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Theorem 1.18 und Theorem 2.15. □

3 Multiplizitäten

In diesem Kapitel wollen wir Serres Schnittmultiplizität von Zykeln mit Hilfe der Tor-Formel definieren und insbesondere auch das Hauptresultat zu dieser Formel beweisen. Als äußerst wichtiges Werkzeug dazu werden wir das Prinzip der *Reduktion auf die Diagonale* vorstellen.

3.1 Die Multiplizität eines Moduls

Im Folgenden wollen wir den Begriff der *Multiplizität* eines Moduls einführen. Dazu führen wir zunächst die Gruppe der *Zykel* eines Rings ein.

Definition 3.1 (Gruppe der Zykel eines Rings)**.** Sei A ein noetherscher Ring. Die freie abelsche Gruppe $Z(A) = \bigoplus_{\mathrm{Spec}(A)} \mathbb{Z}$ heißt **Gruppe der Zykel** von A. Ihre Elemente werden **Zykel** genannt. Wir nennen einen Zykel Z **positiv**, falls er von der Form

$$Z = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} n(\mathfrak{p})\mathfrak{p}$$

mit $n(\mathfrak{p}) \geq 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist.

Definition 3.2. Sei A ein noetherscher lokaler Ring der Dimension n. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei $Z_p(A)$ die Untergruppe von $Z(A)$, die von den Primidealen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $\dim(A/\mathfrak{p}) = p$ erzeugt wird. Wir nennen $Z_p(A)$ die **Gruppe der Zykel** von A der Dimension p. Offensichtlich gilt $Z(A) = \bigoplus_{p=0}^{n} Z_p(A)$.

Ist A ein noetherscher Ring, so bezeichnen wir im Folgenden die abelsche Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln mit $K(A)$ und die abelsche Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln von Dimension $\leq p$ mit $K_p(A)$.

Lemma 3.3. *Sei A ein noetherscher Ring und $0 \to M \to N \to P \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $K(A)$. Sind M und P in $K_p(A)$, so auch N.*

Beweis. Lokalisieren liefert sofort $\mathrm{Supp}(N) = \mathrm{Supp}(M) \cup \mathrm{Supp}(P)$, also

$$\begin{aligned}\dim_A(N) &= \sup\nolimits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(N)} \dim(A/\mathfrak{p}) \\ &= \sup\nolimits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) \cup \mathrm{Supp}(P)} \dim(A/\mathfrak{p}) \\ &= \max(\dim_A(M), \dim_A(P)).\end{aligned}$$

□

Lemma 3.4. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring und sei $M \in K_p(A)$. Sei weiter $\mathfrak{q}$ ein Ideal von A mit $\dim(A/\mathfrak{q}) = p$. Dann gilt $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) < \infty$.*

Ist $0 = M_0 \subset \ldots \subset M_s = M$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M mit $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{r}_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ für gewisse $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Spec}(A)$, dann sind genau $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q})$ dieser M_i/M_{i-1} von der Form $A/\mathfrak{q}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Supp}(M)$, so gilt $M_\mathfrak{q} = 0$ und damit $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = 0 < \infty$. Ist andererseits $\mathfrak{q} \in \operatorname{Supp}(M)$, so gilt wegen $\dim_A(M) \leq p$:

$$\dim(A/\mathfrak{q}) = p = \sup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)} \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim_A(M).$$

Insbesondere gibt es kein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Supp}(M_\mathfrak{q}) &= \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{q}/\operatorname{Ann}_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q})) \\
&= \operatorname{Spec}((A/\operatorname{Ann}_A(M))_\mathfrak{q}) \\
&= \{\mathfrak{p}A_\mathfrak{q} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M) \wedge \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\} \\
&= \{\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}\},
\end{aligned}$$

also enthält $\operatorname{Supp}(M_\mathfrak{q})$ nur das eindeutige Maximalideal von $A_\mathfrak{q}$. Mit Lemma 1.9 folgt also $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) < \infty$.

Aus der aufsteigenden Folge von Untermoduln von M erhalten wir durch Lokalisieren an $\mathfrak{q}$:

$$0 = M_{0\mathfrak{q}} \subset \ldots \subset M_{s\mathfrak{q}} = M_\mathfrak{q}.$$

Dabei gilt

$$M_{i\mathfrak{q}}/M_{i-1\mathfrak{q}} \cong (M_i/M_{i-1})_\mathfrak{q} \cong (A/\mathfrak{r}_i)_\mathfrak{q},$$

also ist $M_{i\mathfrak{q}}/M_{i-1\mathfrak{q}}$ genau dann 0, wenn $(A \setminus \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{r}_i \neq \emptyset$, also wenn $\mathfrak{r}_i \not\subset \mathfrak{q}$. Wir wollen nun $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Supp}(M)$ zeigen. Dazu betrachten wir die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M_{j-1\mathfrak{r}_i} \to M_{j\mathfrak{r}_i} \to (M_j/M_{j-1})_{\mathfrak{r}_i} \to 0.$$

Diese zeigen, dass $M_{j\mathfrak{r}_i} = 0$ genau dann gilt, wenn $M_{j-1\mathfrak{r}_i} = 0$ und $(M_j/M_{j-1})_{\mathfrak{r}_i} = 0$. Wir wissen aber

$$(M_i/M_{i-1})_{\mathfrak{r}_i} = (A/\mathfrak{r}_i)_{\mathfrak{r}_i} = \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{r}_i) \neq 0,$$

also folgt für alle $j \geq i$ induktiv $M_{j\mathfrak{r}_i} \neq 0$ und insbesondere $M_{\mathfrak{r}_i} \neq 0$ und demnach $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Supp}(M)$. Ist $M_{i\mathfrak{q}}/M_{i-1\mathfrak{q}} \neq 0$, so haben wir weiter oben bereits gesehen, dass $\mathfrak{r}_i \subset \mathfrak{q}$ gilt. Aber wegen $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Supp}(M)$ und weil $\mathfrak{q}$ das einzige Primideal in $\operatorname{Supp}(M)$ ist, das in $\mathfrak{q}$ enthalten ist, folgt bereits $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{q}$. Folglich gilt für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$ mit $M_{i\mathfrak{q}}/M_{i-1\mathfrak{q}} \neq 0$ bereits $M_{i\mathfrak{q}}/M_{i-1\mathfrak{q}} = \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{q})$ und insbesondere sind sie einfache $A_\mathfrak{q}$-Moduln. Durch Weglassen von gleichen Untermoduln erhalten wir also eine Kompositionsreihe von $M_\mathfrak{q}$ über $A_\mathfrak{q}$, deren Länge gerade die Anzahl k der Indizes $i \in \{1, \ldots, s\}$ mit $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{q}$ ist. Demnach gilt auch $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = k$. $\square$

Definition 3.5. Sei A ein noetherscher lokaler Ring. Dann definieren wir folgende Funktion:

$$\begin{aligned} z_p\colon K_p(A) &\to Z_p(A) \\ M &\mapsto \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A)\\ \dim(A/\mathfrak{q})=p}} \ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q})\mathfrak{q} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, denn es gibt nur endlich viele Primideale $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\dim(A/\mathfrak{q}) = p$ und $\ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) \neq 0$. Wir nennen $z_p(M)$ den zu M gehörigen **Zykel** der Dimension p.

Bemerkung.

(a) Sei A ein noetherscher lokaler Ring. Da die Länge von A-Moduln additiv auf kurzen exakten Sequenzen ist, ist es auch die Funktion z_p. Ist $M \in K_{p-1}(A)$ und $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\dim(A/\mathfrak{q}) = p$, so gilt $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Supp}(M)$, da $\dim(M) < p$. Also folgt $z_p(M) = 0$, das heißt die Funktion z_p ist null auf ganz $K_{p-1}(A)$.

(b) Ist A ein noetherscher lokaler Integritätsring der Dimension n, so ist $\mathfrak{q} = (0)$ das einzige Primideal von A mit $\dim(A/\mathfrak{q}) = n$. Folglich gilt $Z_n(A) \cong \mathbb{Z}$. Ist $M \in K_n(A)$, so gilt

$$z_n(M) = \ell_{A_{(0)}}(M_{(0)}) = \dim_{\operatorname{Quot}(A)}(M \otimes_A \operatorname{Quot}(A)) = \operatorname{rk}(M).$$

Definition 3.6 (Multiplizität eines Moduls)**.** Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ ein Ideal von A mit $\ell_A(A/\mathfrak{a}) < \infty$. Ist $M \neq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul, dann gilt insbesondere $\ell_A(M/\mathfrak{a}M) < \infty$ und mit Theorem 1.18 folgt $\deg(P_\mathfrak{a}(M)) = \dim(M)$. Wir nennen dann $e_\mathfrak{a}(M) := e_\mathfrak{a}(M, \dim(M))$ die **Multiplizität** von M bezüglich $\mathfrak{a}$.

Allgemeiner betrachten wir $e_\mathfrak{a}(M,p)$ für $\dim(M) \leq p$. Dies liefert uns eine Funktion

$$\begin{aligned} e_\mathfrak{a}(-,p)\colon K_p(A) &\to \mathbb{N} \\ M &\mapsto e_\mathfrak{a}(M,p), \end{aligned}$$

die nach Korollar 1.13 additiv auf kurzen exakten Sequenzen ist. Per Definition ist sie null auf $K_{p-1}(A)$. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$, so nennen wir $e_\mathfrak{a}(M) = e_\mathfrak{m}(M)$ die **Multiplizität** von M. Insbesondere heißt $e_\mathfrak{m}(A)$ die **Multiplizität** des lokalen Rings A.

Lemma 3.7. *Ist A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ ein Ideal von A mit $\ell_A(A/\mathfrak{a}) < \infty$ und $M \in K_p(A)$, so gilt folgende* Additivitäts-Formel*:*

$$e_\mathfrak{a}(M,p) = \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(A)\\ \dim(A/\mathfrak{q})=p}} \ell_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) e_\mathfrak{a}(A/\mathfrak{q},p).$$

Beweis. Es gibt einen aufsteigende Folge $0 = M_0 \subset \ldots \subset M_s = M$ von Untermoduln von M mit $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{r}_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, s\}$, für gewisse $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Spec}(A)$ (siehe [Ser00, Chapter I, Corollary 2 nach Proposition 5]). Wir wollen nun durch Induktion über s zeigen, dass

$$e_{\mathfrak{a}}(M_s, p) = \sum_{i=1}^{s} e_{\mathfrak{a}}(M_i/M_{i-1}, p)$$

gilt. Wegen $M_1 = M_1/M_0$ haben wir im Fall $s = 1$ die Gleichung

$$e_{\mathfrak{a}}(M_1, p) = e_{\mathfrak{a}}(M_1/M_0, p) = \sum_{i=1}^{1} e_{\mathfrak{a}}(M_i/M_{i-1}, p).$$

Sei nun also $s > 1$ und die Behauptung bereits für $s - 1$ gezeigt. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_{s-1} \to M_s \to M_s/M_{s-1} \to 0.$$

Mit Korollar 1.13 und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned} e_{\mathfrak{a}}(M_s, p) &= e_{\mathfrak{a}}(M_{s-1}, p) + e_{\mathfrak{a}}(M_s/M_{s-1}, p) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} e_{\mathfrak{a}}(M_i/M_{i-1}, p) + e_{\mathfrak{a}}(M_s/M_{s-1}, p) \\ &= \sum_{i=1}^{s} e_{\mathfrak{a}}(M_i/M_{i-1}, p). \end{aligned}$$

Wie bereits im Beweis von Lemma 3.4 gesehen, gilt $\mathfrak{r}_i \in \operatorname{Supp}(M)$ und damit folgt $\dim(A/\mathfrak{r}_i) \leq p$. Ist $\dim(A/\mathfrak{r}_i) < p$, so ist $e_{\mathfrak{a}}(M_i/M_{i-1}, p) = 0$, also folgt mit Lemma 3.4

$$e_{\mathfrak{a}}(M, p) = \sum_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \\ \dim(A/\mathfrak{q}) = p}} \ell_{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) e_{\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{q}, p). \qquad \square$$

Bemerkung. Sei A ein noetherscher lokaler Ring der Dimension n mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \subset \mathfrak{m}$ mit $\ell_A(A/\mathbf{x}A) < \infty$. Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, dann gilt $\ell_A(M/\mathbf{x}M) < \infty$ und nach Theorem 2.15 gilt

$$e_{\mathbf{x}}(M, n) = \chi(\mathbf{x}, M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h_i(\mathbf{x}, M),$$

wobei $h_i(\mathbf{x}, M)$ die Länge der i-ten Homologiegruppe des Koszul-Komplexes $K(\mathbf{x}, M)$ ist.

3.2 Reduktion auf die Diagonale

Im Folgenden wollen wir das Verfahren der *Reduktion auf die Diagonale* einführen.

Sind V und W irreduzible Untervarietäten von $\mathbb{A}_k^n$, dann ist die algebraische Menge $V \cap W = V(I(V) + I(W))$ im Allgemeinen nicht irreduzibel. Deswegen interessieren wir uns im Folgenden für eine irreduzible Komponente davon.

Proposition 3.8. *Sei k ein Körper. Sind V und W irreduzible Untervarietäten von $\mathbb{A}_k^n$ und ist T eine irreduzible Komponente von $V \cap W$, dann gilt*

$$\operatorname{codim}(T) \leq \operatorname{codim}(V) + \operatorname{codim}(W).$$

Oder in algebraischer Sprache ausgedrückt: Sind $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'' \in \operatorname{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$ und ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Element in $V(\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}'')$, dann gilt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}') + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}'').$$

Um dies zu beweisen benötigen wir mehrere Lemmata:

Lemma 3.9. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A. Dann sind alle Elemente von $\mathfrak{p}$ Nullteiler in A.*

Beweis. Ist $A = 0$, so ist die Aussage trivial. Sei also im Folgenden $A \neq 0$. Ist $B \subset A$, so bezeichnen wir das Komplement von B in A mit $\overline{B}$. Sei $\mathcal{Z}(A)$ die Menge der Nullteiler von A und sei S die multiplikative Menge $\overline{\mathfrak{p}} \cdot \overline{\mathcal{Z}(A)}$. Es gilt $0 \notin S$, denn sonst wäre $0 = ab$ mit $a \in \overline{\mathfrak{p}}$ und $b \in \overline{\mathcal{Z}(A)}$. Dann gilt aber $b \in \mathcal{Z}(A)$ im Widerspruch zu $b \in \overline{\mathcal{Z}(A)}$. Demnach gilt $A_S \neq 0$ und es gibt ein Primideal $\mathfrak{q}'$ von A_S. Dieses entspricht einem Primideal $\mathfrak{q}$ von A mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, also $\mathfrak{q} \subset \overline{S}$. Wegen $A \neq 0$ gilt $1 \notin \mathcal{Z}(A)$ und da $\mathfrak{p}$ prim ist, gilt $1 \notin \mathfrak{p}$. Es folgt $S \supset \overline{\mathfrak{p}} \cup \overline{\mathcal{Z}(A)}$ und damit $\overline{S} \subset \mathfrak{p} \cap \mathcal{Z}(A)$. Insgesamt erhalten wir also

$$\mathfrak{q} \subset \overline{S} \subset \mathfrak{p} \cap \mathcal{Z}(A).$$

Da $\mathfrak{p}$ aber ein minimales Primideal ist, gilt bereits

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \subset \mathcal{Z}(A). \qquad \square$$

Lemma 3.10. *Sei k ein Körper und seien A' und A'' integre endlich erzeugte k-Algebren. Für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von $A' \otimes_k A''$ gilt dann*

$$\dim((A' \otimes_k A'')/\mathfrak{p}) = \dim(A' \otimes_k A'') = \dim(A') + \dim(A'').$$

Beweis. Nach dem noetherschen Normalisierungssatz gibt es $B' = k[X_1, \ldots, X_n]$ und $B'' = k[Y_1, \ldots, Y_m]$ mit der Eigenschaft, dass A' ganz über B' und A'' ganz über B'' ist. Nach dem *Going Up Theorem* gilt dann $\dim(A') = \dim(B')$ und $\dim(A'') = \dim(B'')$. Weiter gilt

$$B' \otimes_k B'' = k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \ldots, Y_m] \cong k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m],$$

und
$$\dim(B' \otimes_k B'') = n + m = \dim(B') + \dim(B'').$$
Ist $a \in A'$, so gibt es eine Ganzheitsgleichung
$$a^r + \alpha_{r-1}a^{r-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0 = 0$$
mit $\alpha_i \in B'$. Ist nun $b \in A''$, dann gilt
$$\begin{aligned}&(a \otimes b)^r + (\alpha_{r-1} \otimes b)(a \otimes b)^{r-1} + \cdots + (\alpha_1 \otimes b^{r-1})(a \otimes b) + \alpha_0 \otimes b^r \\ =&(a^r + \alpha_{r-1}a^{r-1} + \cdots + \alpha_1 a + \alpha_0) \otimes b^r = 0.\end{aligned}$$

Also ist $a \otimes b$ ganz über $B' \otimes_k A''$. Da alle Elemente aus $A' \otimes_k A''$ Summen von Elementen der Form $a \otimes b$ sind, ist folglich $A' \otimes_k A''$ ganz über $B' \otimes_k A''$. Das gleiche Argument zeigt nun, dass $B' \otimes_k A''$ ganz über $B' \otimes_k B''$ ist und wegen der Transitivität der Ganzheit folgt, dass $A' \otimes_k A''$ ganz über $B' \otimes_k B''$ ist.

Seien nun K', K'', L', L'' jeweils die Quotientenkörper von A', A'', B', B''. Dann haben wir folgendes kommutative Diagramm von Injektionen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \otimes_k L'' \arrow[r] & K' \otimes_k K'' \\
0 \arrow[r] & B' \otimes_k B'' \arrow[r] \arrow[u] & A' \otimes_k A'' \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

K' ist als L'-Vektorraum frei und K'' ist als L''-Vektorraum frei. Da Tensorprodukte und direkte Summen vertauschen, ist also $K' \otimes_k K''$ frei über $L' \otimes_k L''$. Insbesondere ist $K' \otimes_k K''$ ein torsionsfreier $B' \otimes_k B''$-Modul.

Betrachte nun $x \in \mathfrak{p} \cap B' \otimes_k B''$. Da $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist, ist x nach Lemma 3.9 ein Nullteiler in $A' \otimes_k A''$. Demnach gibt es ein $0 \neq y \in A' \otimes_k A''$ mit $xy = 0$. Wäre $x \neq 0$, so wäre also $y \in K' \otimes_k K''$ ein $(B' \otimes_k B'')$-Torsionselement, aber $K' \otimes_k K''$ ist torsionsfrei. Folglich gilt $\mathfrak{p} \cap B' \otimes_k B'' = 0$ und damit ist $(A' \otimes_k A'')/\mathfrak{p}$ ganz über $(B' \otimes_k B'')/(\mathfrak{p} \cap B' \otimes_k B'') = B' \otimes_k B''$. Das *Going Up Theorem* liefert uns nun
$$\begin{aligned}\dim((A' \otimes_k A'')/\mathfrak{p}) &= \dim(B' \otimes_k B'') \\ &= \dim(B') + \dim(B'') \\ &= \dim(A') + \dim(A'').\end{aligned}$$
□

Lemma 3.11. *Sei k ein Körper und A eine k-Algebra. Sei außerdem $C = A \otimes_k A$ und sei $\phi\colon C \to A$ der durch $\phi(a \otimes b) = ab$ definierte Homomorphismus. Dann gilt:*

(a) Der Kern $\mathfrak{d}$ von ϕ ist das Ideal von C, das von den Elementen der Form

$$1 \otimes a - a \otimes 1, \qquad a \in A$$

erzeugt wird.

(b) Sind $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ zwei Ideale von A, dann ist das Bild des Ideals $\mathfrak{p}' \otimes_k A + A \otimes_k \mathfrak{p}''$ unter ϕ gleich $\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''$.

Beweis.

(a) Es ist klar, dass $1 \otimes a - a \otimes 1$ für alle $a \in A$ in $\mathfrak{d}$ enthalten ist. Sei umgekehrt $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in \mathfrak{d}$, also $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i) &= \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i) - (1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i - 1 \otimes a_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i. \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$ im von den Elementen $1 \otimes a_i - a_i \otimes 1$ erzeugten Ideal enthalten.

(b) Sind $a' \in \mathfrak{p}'$ und $a'' \in \mathfrak{p}''$, so gilt

$$\phi(a' \otimes 1 + 1 \otimes a'') = \phi(a' \otimes 1) + \phi(1 \otimes a'') = a' + a''.$$

Es folgt also

$$\phi(\mathfrak{p}' \otimes_k A + A \otimes_k \mathfrak{p}'') \supset \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''.$$

Sind umgekehrt $a' = \sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i' \in \mathfrak{p}' \otimes_k A$ und $a'' = \sum_{i=1}^m b_i'' \otimes a_i'' \in A \otimes_k \mathfrak{p}''$, so gilt

$$\phi(a' + a'') = \phi\left(\sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i' + \sum_{i=1}^m b_i'' \otimes a_i''\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i' b_i'}_{\in \mathfrak{p}'} + \underbrace{\sum_{i=1}^m b_i'' a_i'}_{\in \mathfrak{p}''} \in \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''.$$

Es folgt also auch

$$\phi(\mathfrak{p}' \otimes_k A + A \otimes_k \mathfrak{p}'') \subset \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''.$$

□

Beweis von Proposition 3.8. Sei $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, $C = A \otimes_k A$, $D = A/\mathfrak{p}' \otimes_k A/\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}' \otimes_k A + A \otimes_k \mathfrak{p}''$. Sei außerdem ϕ wie in Lemma 3.11 und $\mathfrak{d}$ der Kern von ϕ. Wir haben folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \to \mathfrak{r} \to C \to D \to 0$$

Das Primideal $\mathfrak{P} = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ist ein minimales Primideal in $V(\mathfrak{d}+\mathfrak{r})$, denn $(0) \subset \mathfrak{p}$ und angenommen $\mathfrak{P}'$ ist ein Primideal in $V(\mathfrak{d}+\mathfrak{r})$, das in $\mathfrak{P}$ enthalten ist, so gilt

$$\mathfrak{p} = \phi(\mathfrak{P}) \supset \phi(\mathfrak{P}') \supset \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''.$$

Da $\phi(\mathfrak{P}')$ wegen der Surjektivität von ϕ ein Primideal ist, und weil $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal in $V(\mathfrak{p}'+\mathfrak{p}'')$ ist, folgt

$$\mathfrak{P}' = \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{P}')) + \ker(\phi) = \phi^{-1}(\mathfrak{p}) + \ker(\phi) = \mathfrak{P}.$$

Sei $\mathfrak{d}'$ das Bild von $\mathfrak{d}$ in D, dann entsprechen die Elemente aus $V(\mathfrak{d}')$ wegen der obigen kurzen exakten Sequenz genau den Elementen in $V(\mathfrak{d}+\mathfrak{r})$. Das Bild $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{P}$ in D ist also ein minimales Primideal in $V(\mathfrak{d}')$. Nach Lemma 3.11 wird $\mathfrak{d}$ von den n Elementen $1 \otimes X_i - X_i \otimes 1$ erzeugt. Die minimale Anzahl von Erzeugern von $\mathfrak{d}'$ ist also $\leq n$ und, da $\mathfrak{Q}$ ein minimales Primideal über $\mathfrak{d}'$ ist, folgt $\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}) \leq n$. Sei $\mathfrak{Q}_0$ ein minimales Primideal von D, das in $\mathfrak{Q}$ enthalten ist, dann gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_0) \leq n$. Nach Lemma 3.10 gilt

$$\dim(D/\mathfrak{Q}_0) = \dim(A/\mathfrak{p}') + \dim(A/\mathfrak{p}'').$$

Da D eine endlich erzeugte k-Algebra ist, ist auch $D/\mathfrak{Q}_0$ eine endlich erzeugte k-Algebra, und da $\mathfrak{Q}_0$ prim ist, ist $D/\mathfrak{Q}_0$ sogar integer. Für Primideale $\mathfrak{q}$ von $D/\mathfrak{Q}_0$ gilt also

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + \dim((D/\mathfrak{Q}_0)/\mathfrak{q}) = \dim(D/\mathfrak{Q}_0)$$

(siehe [Ser00, Chapter III, Part D, Proposition 15]). Insbesondere gilt

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_0) = \dim(D/\mathfrak{Q}_0) - \dim((D/\mathfrak{Q}_0)/(\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_0)) = \dim(D/\mathfrak{Q}_0) - \dim(D/\mathfrak{Q}).$$

Nach Konstruktion gilt $A/\mathfrak{p} \cong D/\mathfrak{Q}$ und wir erhalten insgesamt

$$n \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_0) = \dim(A/\mathfrak{p}') + \dim(A/\mathfrak{p}'') - \dim(A/\mathfrak{p}),$$

also

$$n - \dim(A/\mathfrak{p}) \leq n - \dim(A/\mathfrak{p}') + n - \dim(A/\mathfrak{p}'').$$

Da A eine integre endlich erzeugte k-Algebra ist, folgt

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}''). \qquad \square$$

Der obige Beweis basiert auf dem Ersetzen des Tripels $(A; \mathfrak{p}', \mathfrak{p}'')$ durch das Tripel $(A \otimes_k A; \mathfrak{d}, \mathfrak{r})$. Dieses Verfahren wird **Reduktion auf die Diagonale** genannt. Es ist das algebraische Analogon zur Mengentheoretischen Formel $V \cap W = (V \times W) \cap \Delta$.

Ist nämlich k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sind U und V algebraische Mengen in $\mathbb{A}^n_k$ und ist Δ die Diagonale in $\mathbb{A}^n_k \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbb{A}^n_k \cong \mathbb{A}^{2n}_k$, dann gilt nach Definition $\Delta \cong \mathbb{A}^n_k$ und dieser Isomorphismus identifiziert $(U \times_{\mathrm{Spec}(k)} V) \cap \Delta$ mit $U \cap V$.

Wir wollen diese Aussage in algebraische Sprache übersetzen, also betrachten wir $A = k[X_1, \dots, X_n]$, $U = V(\mathfrak{p})$, $V = V(\mathfrak{q})$ und $\Delta = \operatorname{Spec}((A \otimes_k A)/\mathfrak{d})$, wobei $\mathfrak{d}$ der Kern des surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi\colon A \otimes_k A &\to A \\ a \otimes b &\mapsto ab \end{aligned}$$

ist. Sei außerdem $\mathfrak{d}'$ das Bild von $\mathfrak{d}$ in $A/\mathfrak{p} \otimes_k A/\mathfrak{q}$. Dann sind

$$A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q} \cong A/(\mathfrak{p} + \mathfrak{q})$$

und

$$(A/\mathfrak{p} \otimes_k A/\mathfrak{q}) \otimes_{(A \otimes_k A)} (A \otimes_k A)/\mathfrak{d} \cong (A/\mathfrak{p} \otimes_k A/\mathfrak{q})/\mathfrak{d}'$$

jeweils die Koordinatenringe von $U \cap V$ und $(U \times_{\operatorname{Spec}(k)} V) \cap \Delta$ und es gilt

$$(A \otimes_k A)/\mathfrak{d} \cong A \tag{3.1}$$

und

$$A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q} \cong (A/\mathfrak{p} \otimes_k A/\mathfrak{q}) \otimes_{(A \otimes_k A)} A \cong (A/\mathfrak{p} \otimes_k A/\mathfrak{q}) \otimes_{(A \otimes_k A)} (A \otimes_k A)/\mathfrak{d}. \tag{3.2}$$

Diese Formel verallgemeinert sich auf folgende Weise: Sei k ein Körper, A eine k-Algebra, $B = A \otimes_k A$ und $\mathfrak{d}$ das von $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, $a \in A$ erzeugte Ideal in B und seien M und N zwei A-Moduln. Dann ist $B/\mathfrak{d}$ eine zu A isomorphe k-Algebra und A erhält dadurch eine B-Modulstruktur. Die Assoziativitätsformel des Tor-Funktors (siehe [CE56, Chapter IX, Theorem 2.8]) liefert uns die natürlichen Isomorphismen

$$\operatorname{Tor}_n^B(M \otimes_k N, A) \cong \operatorname{Tor}_n^A(M, N). \tag{3.3}$$

Ist also

$$\cdots \to L_1 \to L_0 \to A \to 0$$

eine B-projektive Auflösung von A, dann erhalten wir natürliche Isomorphismen

$$\operatorname{Tor}_n^A(M, N) \cong H_n((M \otimes_k N) \otimes_B L_-).$$

Im Fall $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ist $\mathfrak{d}$ das von $X_i \otimes 1 - 1 \otimes X_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ erzeugte Ideal. Offensichtlich ist $\mathbf{X} = (X_i \otimes 1 - 1 \otimes X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ eine B-reguläre Folge und es gilt

$$H_0^B(\mathbf{X}, B) = B/\mathfrak{d} \cong A.$$

Nach Proposition 2.10 ist $K^B(\mathbf{X}, B)$ also eine B-freie und damit B-projektive Auflösung von A. Es folgt

$$\operatorname{Tor}_n^A(M, N) \cong H_n((M \otimes_k N) \otimes_B K^B(\mathbf{X}, B)) = H_n^B(\mathbf{X}, M \otimes_k N). \tag{3.4}$$

Wir wollen Gleichung (3.4) im Folgenden auf *vervollständigte Tensorprodukte* verallgemeinern.

3.3 Vervollständigte Tensorprodukte

Definition 3.12 (Vervollständigtes Tensorprodukt)**.** Sei k ein noetherscher Ring und seien A und B noethersche k-Algebren. Sei $\mathfrak{m}$ (beziehungsweise $\mathfrak{n}$) ein Ideal von A (beziehungsweise B) mit der Eigenschaft, dass $A/\mathfrak{m}$ (beziehungsweise $B/\mathfrak{n}$) ein k-Modul von endlicher Länge ist. Sei M (beziehungsweise N) ein endlich erzeugter A-Modul (beziehungsweise B-Modul) mit einer $\mathfrak{m}$-stabilen Filtrierung (M_p) (beziehungsweise mit einer $\mathfrak{n}$-stabilen Filtrierung (N_q)). Wegen $V(\mathfrak{m}) = V(\mathfrak{m}^p)$ und $V(\mathfrak{n}) = V(\mathfrak{n}^q)$ folgt mit Lemma 1.9, dass auch $A/\mathfrak{m}^p$ und $B/\mathfrak{n}^q$ von endlicher Länge über k sind. Wegen $\mathfrak{m}^p \subset \mathrm{Ann}_A(M/\mathfrak{m}^pM)$ und $\mathfrak{n}^q \subset \mathrm{Ann}_B(N/\mathfrak{n}^qN)$ ist $M/\mathfrak{m}^pM$ ein endlich erzeugter $(A/\mathfrak{m}^p)$-Modul und $N/\mathfrak{n}^qN$ ein endlich erzeugter $(B/\mathfrak{n}^q)$-Modul. Demnach sind sie von endlicher Länge über k und wegen $M_p \supset \mathfrak{m}^pM$ und $N_q \supset \mathfrak{n}^qN$ sind auch M/M_p und N/N_q von endlicher Länge über k.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ bilden die Moduln $\mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q)$ ein projektives System und wir definieren die **vervollständigten Tor-Funktoren** durch

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_i^k(M,N) = \varprojlim_{(p,q)} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q). \tag{3.5}$$

Im Fall $i = 0$ erhalten wir das **vervollständigte Tensorprodukt**

$$M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N = \varprojlim_{(p,q)} (M/M_p \otimes_k N/N_q). \tag{3.6}$$

Wir geben nun einige Eigenschaften der soeben definierten k-Moduln an:

Proposition 3.13. *Sei k ein noetherscher Ring und seien A und B noethersche k-Algebren. Sei $\mathfrak{m}$ (beziehungsweise $\mathfrak{n}$) ein Ideal von A (beziehungsweise B) mit der Eigenschaft, dass $A/\mathfrak{m}$ (beziehungsweise $B/\mathfrak{n}$) ein k-Modul von endlicher Länge ist. Sei M (beziehungsweise N) ein endlich erzeugter A-Modul (beziehungsweise B-Modul) mit einer $\mathfrak{m}$-stabilen Filtrierung (M_p) (beziehungsweise mit einer $\mathfrak{n}$-stabilen Filtrierung (N_q)).*

(a) Es gilt

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_i^k(M,N) \cong \varprojlim_{p} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_p) \tag{3.7}$$

und

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Tor}}_i^k(M,N) &\cong \varprojlim_{p} \varprojlim_{q} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q)\\ &\cong \varprojlim_{q} \varprojlim_{p} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q).\end{aligned}$$

(b) Die Moduln $\widehat{\mathrm{Tor}}_i^k(M,N)$ sind nicht von den gewählten stabilen Filtrierungen von M und N abhängig.

(c) *Es gibt kanonische Morphismen*

$$M \otimes_k N \to \varprojlim_p (M/M_p) \otimes_k \varprojlim_q (N/N_q) \cong \hat{M} \otimes_k \hat{N}$$

und

$$\hat{M} \otimes_k \hat{N} \to M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N.$$

Weiter ist $M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N$ kanonisch isomorph zur $(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})$-adischen Vervollständigung von $M \otimes_k N$.

(d) *Der Ring $A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B$ ist vollständig bezüglich der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie, wobei*

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{m} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B + A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathfrak{n}.$$

Allgemeiner ist $\widehat{\mathrm{Tor}}_k^i(M, N)$ vollständig bezüglich der der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie. Es gilt

$$(A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B)/\mathfrak{r} \cong (A/\mathfrak{m}) \otimes_k (B/\mathfrak{n})$$

und

$$(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N)/\mathfrak{r}(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong (M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{n}N).$$

Weiter ist $A\widehat{\otimes}_k B$ noethersch und $M\widehat{\otimes}_k N$ ist ein endlich erzeugter $(A\widehat{\otimes}_k B)$-Modul. Außerdem korrespondieren die Maximalideale in $A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B$ mit den Maximalidealen in $A/\mathfrak{m} \otimes_k B/\mathfrak{n}$.

(e) *Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln, dann erhalten wir durch die exakten Sequenzen*

$$\begin{aligned}\cdots &\to \mathrm{Tor}_n^k(M/\mathfrak{m}^p M, N/\mathfrak{n}^q N)\\ &\to \mathrm{Tor}_n^k(M''/\mathfrak{m}^p M'', N/\mathfrak{n}^q N)\\ &\to \mathrm{Tor}_{n-1}^k(M'/M' \cap \mathfrak{m}^p M, N/\mathfrak{n}^q N) \to \cdots\end{aligned}$$

eine exakte Sequenz

$$\cdots \to \widehat{\mathrm{Tor}}_n^k(M, N) \to \widehat{\mathrm{Tor}}_n^k(M'', N) \to \widehat{\mathrm{Tor}}_{n-1}^k(M', N) \to \cdots.$$

(f) *Sei nun k ein regulärer Ring der Dimension n und wir nehmen an, dass M als k-Modul betrachtet eine M-Folge $\{a_1, \ldots, a_r\}$ besitzt, das heißt eine M-reguläre Folge von Elementen aus $\mathrm{Rad}(k)$. Dann gilt für alle $i > n - r$:*

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_k^i(M, N) = 0.$$

Beweis.

(a) Gleichung (3.7) gilt, da die Diagonale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine kofinale Teilmenge ist und die zweite Gleichung ist ebenfalls offensichtlich.

(b) Sei (M'_p) eine weitere $\mathfrak{m}$-stabile Filtrierung auf M. Da (M_p) und (M'_p) die gleiche Topologie auf M definieren, nämlich die $\mathfrak{m}$-adische (siehe [Bou06, Chapitre III, §3, Proposition 4]), gibt es zu jedem $p \in \mathbb{N}$ ein $p' \in \mathbb{N}$ mit $M_{p'} \subset M'_p$. Sei

$$\phi_{m,n}\colon \varprojlim_{(p,q)} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) \to \mathrm{Tor}_i^k(M/M_m, N/N_n)$$

der kanonische Morphismus. Ist nun $l \in \mathbb{N}$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $M_m \subset M'_l$ und wir erhalten einen Morphismus

$$M/M_m \to M/M'_l$$

und damit für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Morphismus

$$\alpha_{m,l,n}\colon \mathrm{Tor}_i^k(M/M_m, N/N_n) \to \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n).$$

Sind $m, m' \in \mathbb{N}$ mit $M_m \subset M'_l$, $M_{m'} \subset M'_l$ und $M_m \subset M_{m'}$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M/M_{m'} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & M/M'_l \arrow[d, equal] \\ M/M_m \arrow[r, two heads] & M/M'_l \end{tikzcd}$$

offensichtlich kommutativ und damit kommutiert auch

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_{m'}, N/N_n) \arrow[r, "\alpha_{m',l,n}"] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Tor}_i^k(M/M_m, N/N_n) \arrow[r, "\alpha_{m,l,n}"'] & \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n). \end{tikzcd}$$

Wir definieren nun

$$\psi_{l,n}\colon \varprojlim_{(p,q)} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) \to \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n)$$

durch $\psi_{l,n} = \alpha_{m,l,n} \circ \phi_{m,n}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ mit $M_m \subset M'_l$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von m, wie das folgende kommutative Diagramm zeigt:

$$\begin{tikzcd} \varprojlim_{(p,q)} \mathrm{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) \arrow[r, "\phi_{m,n}"] \arrow[dr, "\phi_{m',n}"'] & \mathrm{Tor}_i^k(M/M_{m'}, N/N_n) \arrow[r, "\alpha_{m',l,n}"] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n) \arrow[d, equal] \\ & \mathrm{Tor}_i^k(M/M_m, N/N_n) \arrow[r, "\alpha_{m,l,n}"'] & \mathrm{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n) \end{tikzcd}$$

Ist nun $l' > l$, also $M'_l \subset M'_{l'}$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $M_m \subset M'_l$ und damit ist das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & M/M_m \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
M/M'_{l'} \arrow[rr] & & M/M'_l
\end{tikzcd}
$$

kommutativ und damit auch das folgende Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & \varprojlim\limits_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) \arrow[ddl, bend right, "\psi_{l',n}"'] \arrow[d, "\phi_{m,n}"] \arrow[ddr, bend left, "\psi_{l,n}"] & \\
 & \operatorname{Tor}_i^k(M/M_m, N/N_n) \arrow[dl, "\alpha_{m,l',n}"'] \arrow[dr, "\alpha_{m,l,n}"] & \\
\operatorname{Tor}_i^k(M/M'_{l'}, N/N_n) \arrow[rr] & & \operatorname{Tor}_i^k(M/M'_l, N/N_n)
\end{tikzcd}
$$

Nach der Definition von $\alpha_{m,l,n}$ ist es offensichtlich, dass $\psi_{l,n}$ auch mit Variationen in n kompatibel ist. Sei

$$\varphi_{m,n} \colon \varprojlim_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M'_p, N/N_q) \to \operatorname{Tor}_i^k(M/M'_m, N/N_n)$$

der kanonische Morphismus. Dann erhalten wir einen eindeutigen Morphismus

$$\Phi \colon \varprojlim_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) \to \varprojlim_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M'_p, N/N_q)$$

mit $\psi_{l,n} = \varphi_{l,n} \circ \Phi$. Vertauschen wir nun die Rollen der Filtrierungen (M_p) und (M'_p), so erhalten wir einen eindeutigen Morphismus

$$\Phi^{-1} \colon \varprojlim_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M'_p, N/N_q) \to \varprojlim_{(p,q)} \operatorname{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q)$$

und das übliche Argument zu universellen Eigenschaften liefert uns, dass diese beiden Morphismen tatsächlich zueinander inverse Isomorphismen sind.

(c) Die Morphismen $M \to M/M_p$ und $N \to N/N_q$ liefern wegen der universellen Eigenschaft des projektiven Limes die beiden Morphismen $M \to \varprojlim_p (M/M_p)$ und $N \to \varprojlim_q (N/N_q)$ und wir erhalten einen Morphismus

$$M \otimes_k N \to \varprojlim_p (M/M_p) \otimes_k \varprojlim_q (N/N_q) \cong \hat{M} \otimes_k \hat{N}$$

wie gewünscht.

Die Morphismen $\hat{M} \cong \varprojlim_p (M/M_p) \to M/M_p$ und $\hat{N} \cong \varprojlim_q (N/N_q) \to N/N_q$ liefern uns Morphismen

$$\hat{M} \otimes_k \hat{N} \to M/M_p \otimes_k N/N_q$$

und die universelle Eigenschaft des projektiven Limes liefert uns wie gewünscht den Morphismus

$$\hat{M} \otimes_k \hat{N} \to M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N.$$

Nach Punkt (b) Können wir zur Berechnung von $M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N$ die $\mathfrak{m}$-adische Filtrierung auf M und die $\mathfrak{n}$-adische Filtrierung auf N verwenden. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N &\cong \varprojlim_{p,q} (M/\mathfrak{m}^p M \otimes_k N/\mathfrak{n}^q N) \\ &\cong \varprojlim_{p} (M/\mathfrak{m}^p M \otimes_k N/\mathfrak{n}^p N) \\ &\cong \varprojlim_{p} ((M \otimes_k N)/(\mathfrak{m}^p M \otimes_k N + M \otimes_k \mathfrak{n}^p N)) \\ &\cong \varprojlim_{p} ((M \otimes_k N)/(\mathfrak{m}^p \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}^p)(M \otimes_k N)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nun gilt offensichtlich

$$(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})^p = \sum_{s+t=p} \mathfrak{m}^s \otimes_k \mathfrak{n}^t \supset \mathfrak{m}^p \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}^p.$$

Sind andererseits $s, t \in \mathbb{N}$ mit $s + t = 2p$, so gilt $s \geq p$ oder $t \geq p$ und damit folgt $\mathfrak{m}^s \otimes_k \mathfrak{n}^t \subset \mathfrak{m}^p \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}^p$, also gilt

$$\mathfrak{m}^p \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}^p \supset \sum_{s+t=2p} \mathfrak{m}^s \otimes_k \mathfrak{n}^t = (\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})^{2p}.$$

Demnach sind die $(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})$-adische Filtrierung auf $M \otimes_k N$ und die Filtrierung $((\mathfrak{m}^p \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}^p)(M \otimes_k N))_p$ kofinal und mit Gleichung (3.8) folgt

$$M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N \cong \varprojlim_{p} (M \otimes_k N)/((\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})^p (M \otimes_k N)).$$

(d) Da das vervollständigte Tensorprodukt mit Summen kompatibel ist, ist $\mathfrak{r}$ nach Punkt (c) die $(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})$-adische Vervollständigung von $\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{m}$, also ist $A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B$ vollständig bezüglich der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie. Analog sieht man auch, dass $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M, N)$ vollständig bezüglich der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie ist. Es gilt also auch

$$(A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B)/\mathfrak{r} \cong (A \otimes_k B)/(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n}) \cong (A/\mathfrak{m}) \otimes_k (B/\mathfrak{n})$$

und

$$(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N)/\mathfrak{r}(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong (M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{n}N).$$

Weiter gilt $\operatorname{gr}(\mathfrak{r}) \cong \operatorname{gr}(\mathfrak{m} \otimes_k B + A \otimes_k \mathfrak{n})$ und $\operatorname{gr}(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong \operatorname{gr}(M \otimes_k N)$. Da A und B noethersch sind, sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ endlich erzeugt, also ist auch $\mathfrak{r}^n/\mathfrak{r}^{n+1}$ endlich erzeugt und damit ist $\operatorname{gr}(\mathfrak{r})$ ein endlich erzeugter $\operatorname{gr}(A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B)$-Modul. Folglich sind $\mathfrak{r}$

und $M \widehat{\otimes}_k N$ bereits endlich erzeugt (siehe [Ser00, Chapter II, Part A, Corollary 2 nach Proposition 6]).

Da $(A/\mathfrak{m}) \otimes_k (B/\mathfrak{n})$ als Tensorprodukt noetherscher Moduln noethersch ist, ist $A \widehat{\otimes}_k B$ ebenfalls noethersch (siehe [Ser00, Chapter II, Part A, Corollary 3 nach Proposition 6]).

Sei $x \in \mathfrak{r}$, dann konvergiert $1+x+x^2+\cdots$ in $\mathfrak{r}$ und es gilt $1+x+x^2+\cdots = \frac{1}{1-x}$, das heißt für alle $x \in \mathfrak{r}$ ist $1-x \in (A \widehat{\otimes}_k B)^\times$. Da $\mathfrak{r}$ ein Ideal ist, gilt also insbesondere auch $1 + ax \in (A \widehat{\otimes}_k B)^\times$ für alle $a \in A \widehat{\otimes}_k B$ und es folgt $\mathfrak{r} \subset \operatorname{Rad}(A \widehat{\otimes}_k B)$. Demnach korrespondieren die Maximalideale in $A \widehat{\otimes}_k B$ mit den Maximalidealen in $A/\mathfrak{m} \otimes_k B/\mathfrak{n}$.

(e) Die Moduln $M/\mathfrak{m}^p M$, $M''/\mathfrak{m}^p M''$, $M'/M' \cap \mathfrak{m}^p M$ und $N/\mathfrak{n}^q N$ sind von endlicher Länge, wie wir in Definition 3.12 bereits gesehen haben. Da sie endlich erzeugt sind, sind sie insbesondere auch artinsch und es folgt, dass auch die folgenden Moduln für alle $n \in \mathbb{N}$ artinsch sind:

$$\begin{gathered}\operatorname{Tor}_n^k(M/\mathfrak{m}^p M, N/\mathfrak{n}^q N),\\ \operatorname{Tor}_n^k(M''/\mathfrak{m}^p M'', N/\mathfrak{n}^q N),\\ \operatorname{Tor}_n^k(M'/M' \cap \mathfrak{m}^p M, N/\mathfrak{n}^q N)\end{gathered}$$

Also erfüllen sie die *Mittag-Leffler-Bedingung* (siehe [GD67, Chapter 0, 13.1.2]) und es folgt, dass die Sequenz wie gewünscht exakt ist (siehe [GD67, Chapter 0, Proposition 13.2.2]).

(f) Wegen

$$\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M, N) = \varprojlim_n \widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M, N/\mathfrak{q}^n N)$$

genügt es die Behauptung im Fall $\ell_k(N) < \infty$ zu zeigen. Ist $i > n$, so gilt für alle $p, q \in \mathbb{N}$, dass $\operatorname{Tor}_i^k(M/M_p, N/N_q) = 0$, also auch $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M, N) = 0$. Dann liefert uns die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot a_1} M \to M/a_1 M \to 0 \tag{3.9}$$

wegen Punkt (e) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M, N) \xrightarrow{\cdot a_1} \widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M, N).$$

Wegen $\ell_k(N) < \infty$ wird die Kette

$$N \supset a_1 N \supset a_1^2 N \supset \cdots$$

stationär, das heißt es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$a_1^n N = a_1^{n+1} N.$$

Da N über A endlich erzeugt ist, liefert das Nakayama-Lemma bereits $a_1^{n_0}N = 0$ und damit auch $a_1^{n_0} \in \operatorname{Ann}_k(\widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M,N))$. Sei n_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Angenommen $\widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M,N) \neq 0$, dann gilt $n_0 \geq 1$ und es gibt ein

$$0 \neq x \in a_1^{n_0-1}\widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M,N) \subset \widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M,N)$$

mit $a_1x = 0$ im Widerspruch zur Injektivität der Abbildung $\cdot a_1$. Folglich gilt $\widehat{\operatorname{Tor}}_n^k(M,N) = 0$ und dies zeigt die Behauptung im Fall $r = 1$.

Im Fall $r > 1$ ist $\{a_2, \ldots, a_r\}$ eine (M/a_1)-Folge der Länge $r-1$ und mit der Induktionsvoraussetzung angewendet auf M/a_1 folgt $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M/a_1, N) = 0$ für alle $i > n-(r-1)$. Wir erhalten also aus Gleichung (3.9) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{\operatorname{Tor}}_{n-r}^k(M,N) \xrightarrow{\cdot a_1} \widehat{\operatorname{Tor}}_{n-r}^k(M,N)$$

und mit dem gleichen Argument wie oben folgt $\widehat{\operatorname{Tor}}_{n-r}^k(M,N) = 0$. □

Bemerkung. Trägt N in Proposition 3.13 Punkt (f) eine natürliche A-Modul-Struktur, so kann die M-Folge $\{a_1, \ldots, a_r\}$ auch aus Elementen aus $\operatorname{Rad}(A)$ gewählt werden. Der Beweis bleibt in diesem Fall identisch.

Hat A eine A-Folge der Länge n, dann gilt $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M', N) = 0$ für alle freien A-Moduln M' und alle $i > 0$. In diesem Fall ist der Funktor $M \mapsto \widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M,N)$ der i-te linksabgeleitete Funktor des Funktors $M \mapsto M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N$. Insbesondere ist $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(M,N)$ ein endlich erzeugter $(A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B)$-Modul.

Wir wollen nun den für uns wichtigsten Fall untersuchen, nämlich dass k ein Körper ist, $A \cong B \cong k[[X_1, \ldots, X_n]]$ und $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{n} \cong (X_1, \ldots, X_n)$. In diesem Fall ist $\widehat{\operatorname{Tor}}_i^k(A,B) = 0$ für $i > 0$, denn B trägt eine natürliche A-Modul-Struktur und A hat die A-Folge $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Wie wir bereits gesehen haben, ist $A \widehat{\otimes}_k B$ die $\mathfrak{r}$-adische Vervollständigung von $A \otimes_k B$, wobei

$$\mathfrak{r} = (X_1, \ldots, X_n) \otimes_k B + A \otimes_k (Y_1, \ldots, Y_n).$$

Sei nun $C = k[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]]$ der formale Potenzreihenring in $2n$ Variablen. Dann haben wir eine Einbettung

$$\begin{aligned} \phi\colon A \otimes_k B &\to C \\ f \otimes g &\mapsto fg \end{aligned}$$

(siehe [Bar11, Proposition 3.1]) und das Bild von $\mathfrak{r}$ unter dieser Einbettung ist offensichtlich $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$. Zusätzlich gilt $k[X_1, \ldots, X_n] \subset A$ und $k[Y_1, \ldots, Y_n] \subset B$ und da Polynomringe und formale Potenzreihenringe flach sind, haben wir eine Injektion

$$k[X_1, \ldots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \ldots, Y_n] \hookrightarrow A \otimes_k B \hookrightarrow C,$$

die offenbar dem Morphismus

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \dots, Y_n] &\to C \\ f \otimes g &\mapsto fg \end{aligned}$$

entspricht. Das Bild dieses Morphismus ist bekannterweise $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$, es gilt also $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] \subset \phi(A \otimes_k B)$. Nun ist aber C die Vervollständigung von $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ bezüglich $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$, also folgt bereits

$$A \widehat{\otimes}_k B \cong C.$$

Proposition 3.14. *Es sei k ein Körper und $A \cong B \cong k[[X_1, \dots, X_n]]$. Sei außerdem $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{n} \cong (X_1, \dots, X_n)$ und C der formale Potenzreihenring $k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]$ in $2n$ Variablen. Sei M (beziehungsweise N) ein endlich erzeugter A-Modul (beziehungsweise B-Modul) mit einer $\mathfrak{m}$-stabilen Filtrierung (M_p) (beziehungsweise mit einer $\mathfrak{n}$-stabilen Filtrierung (N_q)). Dann gilt*

$$\operatorname{Tor}_i^A(M, N) \cong \operatorname{Tor}_i^C(M \widehat{\otimes}_k N, A). \tag{3.10}$$

Beweis. Es sei nun $\mathfrak{q}$ (beziehungsweise $\mathfrak{q}'$) ein Ideal von A (beziehungsweise B) mit $\ell_A(A/\mathfrak{q}) < \infty$ (beziehungsweise $\ell_B(B/\mathfrak{q}') < \infty$). Weiter sei $\mathfrak{s}$ das von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ erzeugte Ideal in C und wir statten M, N und $M \widehat{\otimes}_k N$ jeweils mit der $\mathfrak{q}$-adischen, $\mathfrak{q}'$-adischen und $\mathfrak{s}$-adischen Topologie aus. Wir betrachten nun die zugehörigen graduierten Moduln $\operatorname{gr}(M)$, $\operatorname{gr}(N)$ und $\operatorname{gr}(M \widehat{\otimes}_k N)$. Der natürliche Morphismus $M \otimes_k N \to M \widehat{\otimes}_k N$ induziert einen Morphismus

$$\operatorname{gr}(M) \otimes_k \operatorname{gr}(N) \to \operatorname{gr}(M \widehat{\otimes}_k N).$$

Die $\mathfrak{s}$-adische Filtrierung und die $(\mathfrak{m} \widehat{\otimes}_k B + A \widehat{\otimes}_k \mathfrak{m})$-adische Filtrierung sind offenbar kofinal und es folgt

$$\operatorname{gr}(M \widehat{\otimes}_k N) \cong \operatorname{gr}(M \otimes_k N).$$

Da Tensorprodukte und direkte Summen vertauschen, zeigt dies, dass der obige Morphismus ein Isomorphismus ist. Also gilt

$$\dim(M \widehat{\otimes}_k N) = \dim(M) + \dim(N)$$

und

$$e_{\mathfrak{s}}(M \widehat{\otimes}_k N, \dim(M) + \dim(N)) = e_{\mathfrak{q}}(M, \dim(M)) \cdot e_{\mathfrak{q}'}(N, \dim(N)).$$

Sind

$$\cdots \to K_1 \to K_0 \to M \to 0$$

und

$$\cdots \to L_1 \to L_0 \to N \to 0$$

jeweils eine A-freie und eine B-freie Auflösung von M und N, dann ist

$$\left(\bigoplus_{p+q=n} K_p \widehat{\otimes}_k L_q \right)_n$$

eine C-freie Auflösung von $M \widehat{\otimes}_K N$. Sei $\mathfrak{d} = (X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n) \subset C$, dann gilt offenbar $A \cong C/\mathfrak{d}$. Folglich gilt

$$K_p \otimes_A L_q \cong (K_p \widehat{\otimes}_k L_q) \otimes_C A$$

und wir erhalten die Formel für der Reduktion auf die Diagonale:

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^C(M \widehat{\otimes}_k N, A). \qquad \square$$

3.4 Reguläre Ringe gleicher Charakteristik

Sei nun k ein Körper, $A = k[[X_1, \dots, X_n]]$, $C = A \widehat{\otimes}_k A = k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]$ und $\mathfrak{d} = (X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n) \subset C$. Seien M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln. Da die Elemente $X_j - Y_j$ offensichtlich eine C-reguläre Folge bilden, erhalten wir mit Gleichung (3.10) und Korollar 2.11:

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^C(C/\mathfrak{d}, M \widehat{\otimes}_k N) \cong H_i^C((X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n), M \widehat{\otimes}_k N).$$

Ist $M \otimes_A N$ von endlicher Länge, so ist es auch $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$. Außerdem ist auch

$$(M \widehat{\otimes}_k N)/\mathfrak{d}(M \widehat{\otimes}_k N) \cong M \widehat{\otimes}_k N \otimes_C C/\mathfrak{d} \cong M \otimes_A N$$

von endlicher Länge. Nach Theorem 2.15 ist dann die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\chi(M,N) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M,N))$$

gleich der Multiplizität $e_{\mathfrak{d}}(M \widehat{\otimes}_k N, n)$ des C-Moduls $M \widehat{\otimes}_k N$ bezüglich des Ideals $\mathfrak{d}$. Folglich gilt:

(a) $\chi(M,N) \geq 0$.

(b) $\dim(M) + \dim(N) = \dim(M \widehat{\otimes}_k N) \leq n$.

(c) $\chi(M,N) = 0$, genau dann, wenn $\dim(M) + \dim(N) < n$.

Dies wollen wir nun auf *reguläre Ringe gleicher Charakteristik* verallgemeinern.

Definition 3.15 (Regulärer Ring gleicher Charakteristik)**.** Ist A ein Integritätsring, so nennen wir A von **gleicher Charakteristik**, wenn für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ die Ringe A und $A/\mathfrak{p}$ die gleiche Charakteristik haben.

Ist A ein regulärer Ring und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, so ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein regulärer lokaler Ring und damit ein Integritätsring (siehe [Kap74, Theorem 164]). Wir nennen A von **gleicher Charakteristik**, falls für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ von gleicher Charakteristik ist.

Theorem 3.16. *Sei A ein regulärer Ring gleicher Charakteristik, seien M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln mit der Eigenschaft, dass $M \otimes_A N$ von endlicher Länge ist und sei $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal in $\operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$, dann gilt:*

(a) $\chi_{\mathfrak{q}}(M, N) := \sum_{i=0}^{\dim(A)} (-1)^i \ell_A(\operatorname{Tor}_i^A(M, N)_{\mathfrak{q}}) \geq 0$.

(b) $\dim(M_{\mathfrak{q}}) + \dim(N_{\mathfrak{q}}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$.

(c) $\dim(M_{\mathfrak{q}}) + \dim(N_{\mathfrak{q}}) < \operatorname{ht}(\mathfrak{q})$ *genau dann, wenn* $\chi_{\mathfrak{q}}(M, N) = 0$.

Beweis. Da $A_{\mathfrak{q}}$ regulär ist, gilt $\dim(A_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{globdim}(A_{\mathfrak{q}})$ und damit folgt

$$\operatorname{Tor}_i^{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}, N_{\mathfrak{q}}) = 0$$

für alle $i > \dim(A_{\mathfrak{q}})$. Durch Vervollständigung erhalten wir

$$\operatorname{Tor}_i^A(M, N)_{\mathfrak{q}} \cong \operatorname{Tor}_i^{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}, N_{\mathfrak{q}}) \cong \operatorname{Tor}_i^{\hat{A}_{\mathfrak{q}}}(\hat{M}_{\mathfrak{q}}, \hat{N}_{\mathfrak{q}}).$$

Wegen $\dim(A) \geq \dim(A_{\mathfrak{q}})$ können wir also annehmen, dass A ein vollständiger noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{q}$ ist. Nach *Cohens Struktursatz* (siehe [Coh46, Theorem 15]) ist A dann isomorph zu $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, wobei $k = A/\mathfrak{q}$ und $n = \dim(A)$ und in diesem Fall haben wir die Behauptung bereits weiter oben gezeigt. $\square$

3.5 Die Tor-Formel

Sei X eine algebraische Varietät über dem Körper k. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass k algebraisch abgeschlossen und X irreduzibel ist. Seien U, V und W drei irreduzible Untervarietäten von X, wobei W eine irreduzible Komponente von $U \cap V$ ist. Wir nehmen zusätzlich an, dass der lokale Ring A von X bei W regulär ist. Da k perfekt ist, ist dies genau dann der Fall, wenn der Schnitt von W mit der Menge der glatten Punkte von X nicht leer ist.

Seien $\mathfrak{p}_U$ und $\mathfrak{p}_V$ die Primideale des lokalen Rings A, die zu den Untervarietäten U und V gehören. Nach Voraussetzung ist A regulär und $A/(\mathfrak{p}_U + \mathfrak{p}_V)$ ist von endlicher Länge. Verwenden wir Theorem 3.16, so erhalten wir, dass die Euler-Poincaré-Charakteristik

$$\chi^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V) = \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i \ell_A(\operatorname{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V))$$

wohldefiniert und ≥ 0 ist.

Die Voraussetzungen von Theorem 3.16 sind tatsächlich erfüllt: A ist regulär von gleicher Charakteristik und für $M = A/\mathfrak{p}_U$ und $N = A/\mathfrak{p}_V$ gilt

$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A N) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N) = \{\mathfrak{m}\},$$

wobei $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von A ist, denn $M \otimes_A N \cong A/(\mathfrak{p}_U + \mathfrak{p}_V)$ ist von endlicher Länge, also sind nach Lemma 1.9 alle Elemente von $\operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$ maximale Ideale. Also ist $\mathfrak{m}$ das eindeutige minimale Primideal von $\operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$. Wir können auch tatsächlich bis $\dim(X)$ summieren, denn es gilt $\dim(X) \geq \dim(A)$.

Nach Theorem 3.16 folgt also auch

$$\dim(A/\mathfrak{p}_U) + \dim(A/\mathfrak{p}_V) \leq \dim(A) = \dim(X) - \dim(W),$$

und wegen $\dim(A/\mathfrak{p}_U) = \dim(U) - \dim(W)$ und $\dim(A/\mathfrak{p}_V) = \dim(V) - \dim(W)$ folgt damit

$$\dim(U) + \dim(V) \leq \dim(X) + \dim(W). \tag{3.11}$$

Im Fall, dass in Gleichung (3.11) Gleichheit gilt, sagen wir, dass der Schnitt **eigentlich** in W ist, beziehungsweise wir sagen, dass sich U und V in W **eigentlich schneiden**.

Theorem 3.17.

(a) Falls sich U und V in W nicht eigentlich schneiden, so gilt $\chi^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V) = 0$.

(b) Falls sich U und V in W eigentlich schneiden, so ist $\chi^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V) > 0$ und stimmt mit der Schnitt-Multiplizität $i(X, U \cdot V, W)$ von U und V in W im Sinne von Samuel überein.

Offensichtlich folgen Punkt (a) und der erste Teil von Punkt (b) aus Theorem 3.16. Den zweiten Teil von Punkt (b) beweisen wir, nachdem wir gezeigt haben, dass die Funktion $I(X, U \cdot V, W) = \chi^A(A/\mathfrak{p}_u, A/\mathfrak{p}_V)$ die formalen Eigenschaften einer *Schnittmultiplizität* erfüllt.

3.6 Zykel auf einer nicht singulären affinen Varietät

Sei im Folgenden X eine nicht singuläre affine Varietät der Dimension n und A ihr Koordinatenring. Ist $a \in \mathbb{N}$ und $M \in K_a(A)$, so ist $z_a(M)$ ein positiver Zykel der Dimension a, der genau dann null ist, wenn $\dim(M) < a$.

Sei nun auch $b \in \mathbb{N}$. Sind $\alpha = \sum_i n_i \mathfrak{p}_i \in Z_a(A)$ und $\beta = \sum_j m_j \mathfrak{q}_j \in Z_b(A)$, so sagen wir, dass sich α und β **eigentlich schneiden**, falls sich die zu $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_j$ gehörigen irreduziblen Untervarietäten von X für alle i, j mit $n_i \neq 0$ und $m_j \neq 0$ eigentlich schneiden.

Definition 3.18 (Schnittprodukt von Zykeln)**.** Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $\alpha = \sum_i n_i \mathfrak{p}_i \in Z_a(A)$ und $\beta = \sum_j m_j \mathfrak{q}_j \in Z_b(A)$ zwei Zykel die sich eigentlich schneiden, das heißt für jedes minimale Primideal $\mathfrak{r}$ in $\operatorname{Supp}(A/\mathfrak{p}_i \otimes_A A/\mathfrak{q}_j)$ gilt $\dim(A/\mathfrak{r}) = c = a + b - \dim(X)$. Dann definieren wir das **Schnittprodukt** von α und β durch

$$\alpha \cdot \beta := \sum_{i,j} n_i m_j \left(\sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{p}_i \otimes_A A/\mathfrak{q}_j) \\ \text{minimal}}} \chi^{A_\mathfrak{r}}((A/\mathfrak{p}_i)_\mathfrak{r}, (A/\mathfrak{q}_j)_\mathfrak{r})\mathfrak{r} \right) \in Z_c(A).$$

Proposition 3.19. *Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a+b = n+c$. Seien M und N zwei A-Moduln mit* $\dim(M) \leq a$, $\dim(N) \leq b$ *und* $\dim(M \otimes_A N) \leq c$. *Die Zykel $z_a(M)$ und $z_b(N)$ schneiden sich eigentlich und der Schnittzykel*

$$z_a(M) \cdot z_b(N) = \sum_{\substack{\dim(A/\mathfrak{p})=a \\ \dim(A/\mathfrak{q})=b}} \ell_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \ell_{A_\mathfrak{q}}(N_\mathfrak{q}) \left(\sum_{\substack{\mathfrak{r} \in \mathrm{Supp}(A/\mathfrak{p} \otimes_A A/\mathfrak{q}) \\ \textit{minimal}}} \chi^{A_\mathfrak{r}}((A/\mathfrak{p})_\mathfrak{r}, (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{r}) \mathfrak{r} \right)$$

stimmt mit dem Zykel

$$z_c(\mathrm{Tor}^A(M,N)) := \sum_{i=0}^{\dim(A)} (-1)^i z_c(\mathrm{Tor}_i^A(M,N))$$

überein.

Beweis. Sei W eine irreduzible Komponente von X der Dimension c, die dem Primideal $\mathfrak{r}$ von A entspricht. Nach Definition ist der Koeffizient des Primideals $\mathfrak{r}$ im Zykel $z_c(\mathrm{Tor}^A(M,N))$ durch

$$\sum_{i=0}^{\dim(A)} (-1)^i \ell_{A_\mathfrak{r}}(\mathrm{Tor}_i^A(M,N)_\mathfrak{r}) = \chi^{A_\mathfrak{r}}(M_\mathfrak{r}, N_\mathfrak{r})$$

gegeben. Dieser Koeffizient ist also „biadditiv“ in M und N und nach Punkt (a) in Theorem 3.17 ist er null, falls $\dim(M) < a$ oder $\dim(N) < b$. Das gleiche gilt offensichtlich auch für den Koeffizienten von $\mathfrak{r}$ in $z_a(M) \cdot z_b(N)$. Wir können uns also auf den Fall $M = A/\mathfrak{p}$ und $N = A/\mathfrak{q}$ beschränken, wobei $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale von A sind, die irreduziblen Untervarietäten U und V von X der Dimensionen a und b entsprechen. In diesem Fall ist der Koeffizient von $\mathfrak{r}$ in $z_c(\mathrm{Tor}^A(M,N))$ durch $\chi^{A_\mathfrak{r}}((A/\mathfrak{p})_\mathfrak{r}, (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{r})$ gegeben. □

Bemerkung.

(a) Proposition 3.19 liefert uns eine einfache Methode, um das Schnittprodukt $\alpha \cdot \beta$ zweier positiver Zykel α und β der Dimensionen a und b, die sich eigentlich schneiden, zu berechnen: Wähle Moduln M und N mit $z_a(M) = \alpha$ und $z_b(N) = \beta$, sodass $M \otimes_A N$ die gewünschte Dimension c hat (das ist automatisch der Fall, falls $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(\alpha)$ und $\mathrm{Supp}(N) = \mathrm{Supp}(\beta)$). Der Zykel $\alpha \cdot \beta$ ist dann einfach der Zykel $z_c(\mathrm{Tor}^A(M,N))$.

(b) Wir können den Begriff der Zykel und Definition 3.18 auf algebraische Varietäten erweitern, die nicht notwendigerweise affin sind. In diesem Fall ersetzen wir Primideale $\mathfrak{p}$ von A mit $\dim(A/\mathfrak{q}) = p$ durch irreduzible Untervarietäten von X der Kodimension p und A-Moduln durch *kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarben*, wobei $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X ist. Ist $\mathcal{M}$ solch eine Modulgarbe mit $\dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{M})) \leq a$ (was wir manchmal auch als $\dim(\mathcal{M}) \leq a$ schreiben), so definieren wir auf offensichtliche Weise den Zykel $z_a(\mathcal{M}) \in Z_a(X)$. Auch Proposition 3.19 gilt dann, wobei die Moduln $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$ durch die Garben $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ersetzt werden.

3.7 Eigenschaften des Schnittprodukts

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das Schnittprodukt aus Definition 3.18 die fundamentalen Eigenschaften der Schnitttheorie erfüllt. Da diese Eigenschaften alle lokal sind, können wir annehmen, dass die Varietäten affin und nicht singulär sind. Dies ermöglicht es uns Proposition 3.19 anzuwenden.

Sei also im Folgenden X eine nicht singuläre affine Varietät der Dimension n und A ihr Koordinatenring.

Kommutativität. Dies ist offensichtlich, denn die Bifunktoren $\mathrm{Tor}_i^A(-,-)$ sind symmetrisch.

Assoziativität. Seien z, z' und z'' drei positive Zykel der Dimensionen a, a' und a''. Wir nehmen an, dass die Schnittprodukte $z \cdot z'$, $(z \cdot z') \cdot z''$, $z' \cdot z''$ und $z \cdot (z' \cdot z'')$ definiert sind. Dann müssen wir

$$(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$$

zeigen.

Seien dazu M, M' und M'' drei A-Moduln mit $z_a(M) = z$, $z_{a'}(M') = z'$ und $z_{a''}(M'') = z''$ und zusätzlich $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(z)$, $\mathrm{Supp}(M') = \mathrm{Supp}(z')$ und $\mathrm{Supp}(M'') = \mathrm{Supp}(z'')$.

Nach einer „Assoziativitätsformel“ für Tor-Funktoren (siehe [CE56, s. 347]) erhalten wir die folgenden beiden Spektralsequenzen:

$$\mathrm{Tor}_p^A(M, \mathrm{Tor}_q^A(M', M'')) \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^A(M, M', M'') \tag{3.12}$$

$$\mathrm{Tor}_p^A(\mathrm{Tor}_q^A(M, M'), M'') \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^A(M, M', M'') \tag{3.13}$$

Dabei ist $\mathrm{Tor}_n^A(-, M', -)$ der n-te linksabgeleitete Funktor des Bifunktors

$$(M, M'') \mapsto T_{M'}(M, M'') := M \otimes_A (M' \otimes_A M'') = (M \otimes_A M') \otimes_A M''.$$

Sei $c = a + a' + a'' - 2n$ und $b = a' + a'' - n$. Da die Schnitte eigentlich sind, gilt $\dim(M' \otimes_A M'') \leq b$ und $\dim(M \otimes_A M' \otimes_A M'') \leq c$. Demnach sind die folgenden Zykel wohldefiniert:

$$\begin{aligned} y_q &= z_b(\mathrm{Tor}_q^A(M', M'')) \\ x_{p,q} &= z_c(\mathrm{Tor}_p^A(M, \mathrm{Tor}_q^A(M', M''))) \\ x_i &= z_c(\mathrm{Tor}_i^A(M, M', M'')) \end{aligned}$$

Da Euler-Poincaré-Charakteristiken unter Spektralsequenzen invariant sind, erhalten wir aus Gleichung (3.12):

$$\sum_i (-1)^i x_i = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} x_{p,q}.$$

Aber Proposition 3.19 zeigt

$$\sum_p (-1)^p x_{p,q} = z \cdot y_q \quad \text{und} \quad \sum_q (-1)^q y_q = z' \cdot z''.$$

Folglich gilt

$$\sum_i (-1)^i x_i = z \cdot (z' \cdot z'').$$

Wenden wir das gleiche Argument mit Gleichung (3.13) an, so erhalten wir

$$\sum_i (-1)^i x_i = (z \cdot z') \cdot z'',$$

und damit die gewünschte Assoziativitätsformel.

Produktformel. Sei X' eine weitere nicht singuläre affine Varietät der Dimension n' und A' ihr Koordinatenring. Seien z_1 und z_2 (beziehungsweise z_1' und z_2') zwei Zykel auf X (beziehungsweise X') und nehmen wir an, dass $z_1 \cdot z_2$ und $z_1' \cdot z_2'$ definiert sind. Dann schneiden sich $z_1 \times z_1'$ und $z_2 \times z_2'$ eigentlich auf $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X'$ und es gilt

$$(z_1 \times z_1') \cdot (z_2 \times z_2') = (z_1 \cdot z_2) \times (z_1' \cdot z_2'). \tag{3.14}$$

Um dies zu zeigen, können wir annehmen, dass die Zykel positiv sind. Seien M_1 und M_2 zwei A-Moduln, die zu den Zykeln z_1 und z_2 korrespondieren und seien M_1' und M_2' zwei A'-Moduln, die zu den Zykeln z_1' und z_2' korrespondieren. Man prüft leicht, dass der zum $(A \otimes_k A')$-Modul $M_1 \otimes_k M_1'$ assoziierte Zykel gleich $z_1 \times z_1'$ ist (tatsächlich kann man dies als Definition des Produkts von Zykeln verwenden). Die Produktformel, die wir zeigen wollen, folgt dann aus der *Künneth-Formel*:

$$\mathrm{Tor}_h^{A \otimes_k A'}(M_1 \otimes_k M_1', M_2 \otimes_k M_2') = \bigoplus_{i+j=h} \mathrm{Tor}_i^A(M_1, M_2) \otimes_k \mathrm{Tor}_j^{A'}(M_1', M_2').$$

Reduktion auf die Diagonale. Sei Δ die Diagonale in $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$. Sind z_1 und z_2 zwei Zykel auf X, die sich eigentlich schneiden, so müssen wir die Formel

$$z_1 \cdot z_2 = (z_1 \times z_2) \cdot \Delta \tag{3.15}$$

zeigen. Wir können wieder annehmen, dass z_1 und z_2 positiv sind. Sei $B = A \otimes_k A$ der Koordinatenring von $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} X$ und seien M_1 und M_2 zwei A-Moduln, die mit den Zykeln z_1 und z_2 korrespondieren. Dann gilt nach Gleichung (3.3)

$$\mathrm{Tor}_i^A(M_1, M_2) = \mathrm{Tor}_i^B(M_1 \otimes_k M_2, A).$$

Die Gleichung (3.15) folgt dann durch Bilden der alternierenden Summe der Zykel auf beiden Seiten der obigen Gleichung.

Wir wollen nun den Rest von Theorem 3.17 zeigen.

Beweis des zweiten Teils von Theorem 3.17 Punkt (b). Um zu zeigen, dass die Funktionen I und i übereinstimmen, betrachten wir zunächst den Fall, dass U ein vollständiger Durchschnitt in W ist. Das bedeutet, dass das Ideal $\mathfrak{p}_U$ von h Elementen $x_1, \dots, x_h$ erzeugt wird und es gilt $h = \dim(X) - \dim(U) = \dim(V) - \dim(W)$. Die Familie $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_h)$ ist also eine A-reguläre Folge. Nach Korollar 2.11 gilt also

$$\chi^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V) = \sum_{i=0}^{\dim(A)} (-1)^i \ell_A(H_i(\mathbf{x}, A/\mathfrak{p}_V))$$

und Theorem 2.15 liefert uns

$$\chi^A(A/\mathfrak{p}_U, A/\mathfrak{p}_V) = e_{\mathbf{x}}(A/\mathfrak{p}_V).$$

Nach [Sam67, s. 83] gilt aber $e_{\mathbf{x}}(A/\mathfrak{p}_V) = i(X, U \cdot V, W)$ und das zeigt $I = i$ in diesem Fall.

Der allgemeine Fall reduziert sich auf diesen, indem wir die *Reduktion auf die Diagonale* verwenden, denn diese ist sowohl für i als auch für I gültig. Da die Diagonale Δ nicht singulär ist, ist sie lokal ein vollständiger Durchschnitt und die Voraussetzungen des vorherigen Falls sind erfüllt. □

3.8 Ausblick

Wir haben im Verlauf dieser Arbeit hauptsächlich darauf hingearbeitet, Theorem 3.17 zu beweisen. Als wesentlichen Schritt dazu haben wir Theorem 3.16 gezeigt. Die Einschränkung in Theorem 3.16 auf reguläre Ringe gleicher Charakteristik wirkt allerdings etwas speziell und es ist deswegen natürlich zu vermuten, dass die Aussage dieses Theorems auch für beliebige reguläre Ringe gilt.

Serre selbst hat die Aussage zumindest in etwas allgemeinerer Form gezeigt, nämlich für den Fall unverzweigter regulärer Ringe ungleicher Charakteristik (siehe [Ser00, Chapter V, Part B, Theorem 2]).

Die zweite Aussage des Theorems (die *Dimensionsformel*) wurde von Serre sogar im Fall beliebiger regulärer Ringe gezeigt (siehe [Ser00, Chapter V, Part B, Theorem 3]).

Die erste Aussage des Theorems (die Nichtnegativität von $\chi(M, N)$) wurde im Fall beliebiger regulärer Ringe 1996 von Ofer Gabber gezeigt (siehe [Rob98b]). Der Beweis benutzt komplexe Methoden der algebraischen Geometrie wie die Auflösung von Singularitäten.

Eine Implikation der dritten Aussage des Theorems, nämlich

$$\dim(M) + \dim(N) < \dim(A) \Longrightarrow \chi(M, N) = 0,$$

wurde für den Fall beliebiger regulärer Ringe 1985 von Paul C. Roberts gezeigt (siehe [Rob98a]). Die Frage, ob die umgekehrte Implikation ebenfalls gilt, ist bis heute ein offenes Problem.

Wir führen nun noch die von Serre bereits gegebenen Beweise aus. Dazu zeigen wir zunächst, dass das Verfahren der Reduktion auf die Diagonale unter einer gewissen Voraussetzung auch dann anwendbar ist, wenn A ein formaler Potenzreihenring über einem vollständigen diskreten Bewertungsring ist.

Proposition 3.20. *Sei k ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $A \cong B$ der formale Potenzreihenring in n Variablen über k und seien $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{n} \cong (X_1, \ldots, X_n)$. Sei M (beziehungsweise N) ein endlich erzeugter A-Modul (beziehungsweise B-Modul) mit einer $\mathfrak{m}$-stabilen Filtrierung (M_p) (beziehungsweise mit einer $\mathfrak{n}$-stabilen Filtrierung (N_q)). Sei π ein Erzeuger des Maximalideals von k. Ist π kein Nullteiler auf M und N, so gilt*

$$\dim M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N = \dim M + \dim N - 1$$

und

$$\operatorname{Tor}_p^C(A, M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong \operatorname{Tor}_p^A(M, N).$$

Beweis. Es gilt

$$(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N)/\pi(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong (M/\pi M) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (N/\pi N).$$

Ist π kein Nullteiler auf M und N, dann gilt also

$$\dim M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N = \dim M + \dim N - 1.$$

Sei $C = A \mathbin{\widehat{\otimes}_k} B$. Analog zum Fall, dass k ein Körper ist, sieht man

$$C \cong k[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]].$$

Sei außerdem $\mathfrak{d} = (X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n) \subset C$. Durch freie Auflösungen von M und N wie in Beweis von Proposition 3.14 und eine C-projektive Auflösung von $A \cong C/\mathfrak{d}$ erhalten wir folgende Spektralsequenz:

$$\operatorname{Tor}_p^C(A, \widehat{\operatorname{Tor}}_q^k(M, N)) \Longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+q}^A(M, N)$$

Ist π kein Nullteiler auf M und N, dann degeneriert diese Spektralsequenz und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\operatorname{Tor}_p^C(A, M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong \operatorname{Tor}_p^A(M, N). \qquad \square$$

Theorem 3.21. *Die Aussage von Theorem 3.16 bleibt auch gültig, wenn man die Voraussetzung, dass A ein regulärer Ring gleicher Charakteristik ist, durch folgende allgemeinere Voraussetzung ersetzt: A ist ein regulärer Ring und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist der lokale Ring $A_\mathfrak{p}$ entweder von gleicher Charakteristik, oder von ungleicher Charakteristik und unverzweigt. (Tatsächlich genügt es diese Eigenschaft für alle Maximalideale zu fordern, denn ist A ein unverzweigter regulärer lokaler Ring von ungleicher Charakteristik, dann ist jede Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ vom gleichen Typ, oder von gleicher Charakteristik.)*

Beweis. Nach *Cohens Struktursatz* (siehe [Coh46, Theorem 15]) ist ein unverzweigter regulärer vollständiger lokaler Ring isomorph zu einem formalen Potenzreihenring über einem unverzweigten vollständigen diskreten Bewertungsring. Durch Lokalisieren und Vervollständigen wie im Beweis von Theorem 3.16 genügt es also folgendes Lemma zu beweisen: □

Lemma 3.22. *Sei k ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $A = k[[X_1, \dots, X_n]]$ und seien M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln mit der Eigenschaft, dass $M \otimes_A N$ von endlicher Länge ist. Dann gilt:*

(a) $\chi(M, N) \coloneqq \sum_{i=1}^{n+1} \ell_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) \geq 0$.

(b) $\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(A) = n + 1$.

(c) $\chi(M, N) = 0$ *genau dann, wenn* $\dim(M) + \dim(N) < \dim(A)$.

Beweis. Da die Länge auf kurzen exakten Sequenzen additiv ist, ist $\chi(M, N)$ „biadditiv" in M und N. Indem wir Kompositionsreihen von M und N wählen, deren Quotienten die Form $A/\mathfrak{p}$ für Primideale $\mathfrak{p}$ von A haben (siehe [Ser00, Chapter I, Corollary 2 nach Proposition 5]), können wir uns also auf den Fall $M = A/\mathfrak{p}$ und $N = A/\mathfrak{q}$ für Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von A beschränken. Insbesondere ist dann jeder Endomorphismus auf M und N, der durch skalare Multiplikation gegeben ist, entweder injektiv oder der Nullmorphismus. Sei nun π ein Erzeuger des Maximalideals von k, dann betrachten wir die folgenden verschiedenen Fälle:

π ist kein Nullteiler auf M und N. Sei $C = k[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]$ und $\mathfrak{m}$ das Maximalideal von A. Nach Proposition 3.20 gilt dann

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = \mathrm{Tor}_i^C(A, M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N),$$

wobei wir das vervollständigte Tensorprodukt $M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N$ durch die $\mathfrak{m}$-adischen Filtrierungen auf M und N erhalten. Außerdem gilt

$$\dim(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) = \dim(M) + \dim(N) - 1.$$

Sei $\mathfrak{d}$ das von den Elementen $X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n$ erzeugte Ideal von C. Da die Elemente $X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n$ eine C-reguläre Folge bilden, erhalten wir mit Korollar 2.11:

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^C(C/\mathfrak{d}, M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N) \cong H_i^C((X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n), M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N).$$

Nach Theorem 2.15 gilt dann also

$$\chi(M, N) = e_{\mathfrak{d}}(M \mathbin{\widehat{\otimes}_k} N, n + 1)$$

und es folgt die Behauptung in diesem Fall.

π *annulliert* M *und ist kein Nullteiler auf* N. Wenn wir den Ring A, bezüglich dem $\chi(M,N)$ gebildet wird, angeben wollen, so schreiben wir im Folgenden $\chi^A(M,N)$.

Sei $\overline{M} = M/\pi M$ und $\overline{A} = A/\pi A$. Wegen $\pi M = 0$ folgt $\overline{M} = M$, also ist M auf kanonische Weise ein $\overline{A}$-Modul. Wir haben die *Basiswechsel-Spektralsequenz*

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}_p^{\overline{A}}(M, \operatorname{Tor}_q^A(\overline{A}, N)) \Longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+q}^A(M,N),$$

die im ersten Quadranten liegt (siehe [Wei95, Applications 5.8.5]). Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot\pi} A \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow 0$$

liefert eine freie und damit projektive Auflösung von $\overline{A}$ als A-Modul. Also ist die homologische Dimension von $\overline{A}$ als $\overline{A}$-Modul ≤ 1. Insbesondere ist also auch die flache Dimension von $\overline{A}$ als A-Modul ≤ 1 und wir haben $\operatorname{Tor}_q^A(\overline{A}, N) = 0$ für $q > 1$. Für $q \neq 0, 1$ gilt also bereits $E^2_{p,q} = 0$. Außerdem gilt

$$\overline{A} \otimes_A N \cong N/\pi N$$

und die obige Auflösung zeigt auch

$$\operatorname{Tor}_1^A(\overline{A}, N) = {}_\pi N := \operatorname{Ann}_N(\pi) = \{n \in N \mid \pi n = 0\}.$$

Demnach erhalten wir folgende lange exakte Sequenz:

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+1}^A(M,N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+1}^{\overline{A}}(M, N/\pi N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{p-1}^{\overline{A}}(M, {}_\pi N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_p^A(M,N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_p^{\overline{A}}(M, N/\pi N) \longrightarrow \operatorname{Tor}_{p-2}^{\overline{A}}(M, {}_\pi N) \longrightarrow \cdots$$

Nach Voraussetzung gilt aber ${}_\pi N = 0$, also haben wir Isomorphismen

$$\operatorname{Tor}_p^A(M,N) \cong \operatorname{Tor}_p^{\overline{A}}(M, N/\pi N)$$

und es folgt

$$\chi^A(M,N) = \chi^{\overline{A}}(M, N/\pi N).$$

Aber $\overline{A}$ ist der formale Potenzreihenring in n Variablen über dem Restklassenkörper $\overline{k} = k/\pi k$ von k und $M \otimes_{\overline{A}} (N/\pi N) \cong M \otimes_A N \otimes_A \overline{A}$ ist von endlicher Länge. Wir sind nun also in dem Fall, den wir zu Beginn von Abschnitt 3.4 behandelt haben und es folgt

$$\chi(M,N) \geq 0$$

und

$$\dim_{\overline{A}}(M) + \dim_{\overline{A}}(N/\pi N) \leq n,$$

wobei die Ungleichheit genau dann echt ist, wenn $\chi^{\overline{A}}(M, N/\pi N) = 0$. Wegen $\dim_A(M) = \dim_{\overline{A}}(M)$ und $\dim_{\overline{A}}(N/\pi N) = \dim_A(N/\pi N) = \dim_A(N) - 1$ folgt die Behauptung in diesem Fall.

π annulliert M und N. Wie im vorherigen Fall betrachten wir M als $\overline{A}$-Modul. Die lange exakte Sequenz, die wir aus der Basiswechsel-Spektralsequenz erhalten haben, liefert uns nun

$$\chi^A(M,N) = \chi^{\overline{A}}(M, N/\pi N) - \chi^{\overline{A}}(M, {}_\pi N).$$

Nach Voraussetzung gilt aber $\pi N = 0$ und es folgt $N/\pi N = {}_\pi N = N$, also gilt bereits $\chi^A(M,N) = 0$. Wir müssen also nur noch

$$\dim_A(M) + \dim_A(N) < n+1$$

zeigen. Weil $M \otimes_A N = M \otimes_{\overline{A}} N$ von endlicher Länge ist und $\overline{A}$ der formale Potenzreihenring in n Variablen über $\overline{k}$ ist, sind wir wieder in dem Fall, den wir zu Beginn von Abschnitt 3.4 behandelt haben und es folgt

$$\dim_A(M) + \dim_A(N) = \dim_{\overline{A}}(M) + \dim_{\overline{A}}(N) \leq n < n+1$$

und die Behauptung folgt auch in diesem Fall. $\square$

Theorem 3.23. *Seien A ein regulärer Ring, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei Primideale von A und $\mathfrak{r}$ ein minimales Element in $V(\mathfrak{p}+\mathfrak{q})$. Dann gilt*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{r}).$$

Beweis. Indem wir bei $\mathfrak{r}$ lokalisieren, können wir annehmen, dass A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{r}$ ist. In diesem Fall können wir die Behauptung auf folgende Weise umformulieren: Sind M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln mit $\ell(M \otimes_A N) < \infty$, so gilt $\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(A)$. Um diese Behauptung zu zeigen, können wir annehmen, dass A vollständig ist. Dann gibt es einen formalen Potenzreihenring A_1 über einem vollständigen diskreten Bewertungsring und ein $a \in A_1 \setminus \{0\}$ mit $A \cong A_1/aA_1$ und $\dim(A) = \dim(A_1) - 1$ (siehe [Coh46, Corollary 3 nach Theorem 15]). Wir betrachten M und N nun als A_1-Moduln. Analog zum letzten Fall des Beweises von Lemma 3.22 (ersetze π durch a und A durch A_1) folgt nun

$$\chi^{A_1}(M,N) = 0.$$

Wenden wir Lemma 3.22 nun auf A_1 and, so erhalten wir

$$\dim_A(M) + \dim_A(N) = \dim_{A_1}(M) + \dim_{A_1}(N) < \dim(A_1)$$

und damit

$$\dim(M) + \dim(N) \leq \dim(A_1) - 1 = \dim(A). \quad \square$$

Literatur

[Bar11] Colas Bardavid. „An Effective Description of $k[[X]] \otimes_k k[[Y]]$“. In: *International Journal of Algebra* 5.18 (2011), S. 873–882.

[Bou06] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[CE56] Henri Cartan und Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1956.

[Coh46] Irvin S. Cohen. „On the structure and ideal theory of complete local rings“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 59 (1946), S. 54–106.

[Eis04] David Eisenbud. *Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2004.

[Ful98] William Fulton. *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer New York, 1998.

[GD67] Alexander Grothendieck und Jean Dieudonné. „Éléments de géométrie algébrique“. In: *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 4 (Chapter 0, 1–7, and I, 1–10), 8 (II, 1–8), 11 (Chapter 0, 8–13, and III, 1–5), 17 (III, 6–7), 20 (Chapter 0, 14– 23, and IV, 1), 24 (IV, 2–7), 28 (IV, 8–15), 32 ((IV, 16–21) (1961–1967).

[Kap74] Irving Kaplansky. *Commutative Rings*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1974.

[Rob98a] Paul C. Roberts. *Multiplicities and Chern Classes in Local Algebra*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1998.

[Rob98b] Paul C. Roberts. „Recent developments on Serre's multiplicity conjec- tures. Gabber's proof of the nonnegativity conjecture“. In: *L'Enseignement Mathématique* 44 (1998), S. 305–324.

[Sam67] Pierre Samuel. *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Springer Berlin Heidelberg, 1967.

[Ser00] Jean-Pierre Serre. *Local Algebra*. Übers. von CheeWhye Chin. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[Wei95] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe und dass ich keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe.

Ort, Datum	Unterschrift