Universität Regensburg

Fakultät für Mathematik

Ein Verschwindungssatz für die Garbenkohomologie noetherscher topologischer Räume

Bachelorarbeit

von

Johannes Loher

(Matrikelnummer 1 576 123)

Betreuer:	Prof. Dr. Moritz Kerz
Gutachter:	Prof. Dr. Moritz Kerz

11. August 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wollen wir uns mit einem wichtigen Satz für die Garbenkohomologie noetherscher topologischer Räume beschäftigen. Die Kernaussage des Satzes ist, dass die i-te Kohomologiegruppe einer abelschen Garbe auf einem noetherschen topologischen Raum verschwindet, falls i größer als die Dimension des Raums ist. Der Satz wurde erstmals von Alexander Grothedieck in [Gro57] veröffentlicht und wird deshalb auch oft mit „Verschwindungstheorem von Grothendieck“ bezeichnet. Wir werden in dieser Arbeit allerdings hauptsächlich den Ausführungen von Robin Hartshorne in [Har77] zu diesem Thema folgen. Eine weitere Quelle, aus der etliche Ideen übernommen wurden ist [Mei14].

Um den Satz zu beweisen, benötigen wir einige Grundlagen und Hilfssätze, denen wir uns zuerst widmen. In Kapitel 2 werden wir etliche wichtige Eigenschaften noetherscher topologischer Räume kennenlernen, die später wichtig sein werden. In Kapitel 3 werden wir einige Konstruktionen und Eigenschaften von abelschen Garben untersuchen. Hierbei orientieren wir uns häufig an [GW10]. Dann werden wir in Kapitel 4 Garbenkohomologie und die dazu notwendigen Begriffe einführen. Schließlich werden wir in Kapitel 5 die Garbenkohomologie auf noetherschen topologischen Räumen näher untersuchen und den Haupsatz beweisen.

Für diesen Beweis werden wir in mehreren Schritten vorgehen. Zunächst werden wir zeigen, dass es genügt, den Fall eines irreduziblen topologischen Raums zu betrachten. Dann werden wir den Satz in diesem Fall mit Hilfe von Induktion über die Dimension des Raumes und der langen exakten Kohomologiesequenz beweisen.

2 Topologische Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir einige einfache Eigenschaften von topologischen Räumen untersuchen.

Definition 2.1. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren die **Dimension** von X durch

$$\begin{aligned}\dim(X) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid \ &\text{es gibt eine Kette } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n \\ &\text{von abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen in } X\}.\end{aligned}$$

Definition 2.2. Ein topologischer Raum X heißt **noethersch**, wenn die folgenden offensichtlich äquivalenten Bedingungen gelten:

- Jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen wird stationär.
- Jede aufsteigende Kette von offenen Teilmengen wird stationär.

Lemma 2.3. *Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die keine endliche Vereinigung irreduzibler Mengen sind. Wir nehmen an, dass $\mathcal{A}$ nicht leer ist. Da X noethersch ist, wird jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen stationär. Deswegen gibt es ein minimales Element A_0 in $\mathcal{A}$ bezüglich der Teilmengenbeziehung. Wegen der Definition von $\mathcal{A}$ ist A_0 nicht irreduzibel, es gibt also zwei echte abgeschlossene Teilmengen A_1 und A_2 von A_0 mit $A_0 = A_1 \cup A_2$. Da A_0 ein minimales Element in $\mathcal{A}$ ist, können A_1 und A_2 nicht in $\mathcal{A}$ sein. Das heißt aber wiederum, dass A_1 und A_2 jeweils eine endliche Vereinigung irreduzibler Mengen sind und deswegen ist auch $A_0 = A_1 \cup A_2$ eine endliche Vereinigung irreduzibler Mengen im Widerspruch zu $A_0 \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{A}$ leer. Insbesondere ist auch X die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener irreduzibler Teilmengen. Da der Durchschnitt von zwei irreduziblen Komponenten von X leer ist, folgt damit schon die Behauptung. $\square$

Lemma 2.4. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X. Dann ist Y mit der Teilraumtopologie ebenfalls noethersch.*

Beweis. Sei $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von Y. Dann gibt es für alle $i \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Teilmenge A'_i von X mit $A'_i \cap Y = A_i$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$A''_i = \bigcap_{k=0}^{i} A'_k.$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt dann $A''_i \supset A''_{i+1}$, also ist $A''_0 \supset A''_1 \supset \dots$ eine absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen von X und da X noethersch ist, wird diese stationär. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$A''_i \cap Y = \left(\bigcap_{k=0}^{i} A'_k \right) \cap Y = \left(\bigcap_{k=0}^{i} A'_k \cap Y \right) = \bigcap_{k=0}^{i} A_k = A_i$$

und deswegen wird auch die Kette $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ stationär. Folglich ist ist Y noethersch. $\square$

Lemma 2.5. *Ein topologischer Raum X ist genau dann noethersch, wenn jede Teilmenge von X mit der Teilraumtopologie kompakt ist.*

Beweis. Sei X noethersch, Y eine Teilmenge von X und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Nach Lemma 2.4 ist Y noethersch. Nun gehen wir rekursiv vor. Zunächst wählen wir ein U_0 aus der offenen Überdeckung aus. Für $j > 0$ wählen wir dann ein U_j aus der offenen Überdeckung mit $U_j \not\subset \bigcup_{k=0}^{j-1}$, falls $\bigcup_{k=0}^{j-1} \neq Y$. Andernfalls setzen wir $U_j = \emptyset$. Dann ist

$$U_0 \subset U_0 \cup U_1 \subset U_0 \cup U_1 \cup U_2 \subset \dots$$

eine aufsteigende Kette offener Mengen. Da Y noethersch ist, wird diese Kette stationär, das heißt es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{k=0}^{n} U_k = \bigcup_{k=0}^{m} U_k$ für alle $m > n$. Wegen der Definition der U_j gilt dann insbesondere $U_{m+1} = \emptyset$ und es folgt $\bigcup_{k=0}^{n} U_k = Y$. Wir haben also eine endliche Teilüberdeckung gefunden und damit ist Y kompakt.

Sei nun jede Teilmenge von X mit der Teilraumtopologie kompakt. Sei außerdem

$$U_0 \subset U_1 \subset \dots$$

eine aufsteigende Kette von offenen Teilmengen von X und $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von Y und da Y kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j \in J}$. Sei nun $n = \max J$, dann ist auch $(U_i)_{i \in \{0,\dots,n\}}$ eine endliche offene Überdeckung von Y und es gilt $U_n = Y$. Also wird die Kette stationär und es folgt, dass X noethersch ist. $\square$

3 Garben abelscher Gruppen

In diesem Kapitel werden wir einige Eigenschaften von abelschen Garben untersuchen und die direkte und die inverse Bildgarbe kennlernen. Wir verwenden im Folgenden gelegentlich auch einfach den Begriff „Garbe“ anstatt von „abelscher Garbe“.

Proposition/Definition 3.1. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X. Dann gibt es eine bis auf eindeutige Isomorphie eindeutige abelsche Garbe $\mathcal{F}^+$ auf X und einen Morphismus $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ mit folgender universellen Eigenschaft: Ist $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe auf X und $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus, so gibt es genau einen Morphismus $\overline{\varphi}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \theta$. Wir nennen $\mathcal{F}^+$ die Garbifizierung von $\mathcal{F}$. Weiter gilt:*

1. *Der Morphismus $\theta_p\colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}^+_p$ ist für alle $p \in X$ ein Isomorphismus.*
2. *Ist $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Prägarben, so gibt es genau einen Morphismus $\varphi^+\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$, der folgendes Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta^{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\theta^{\mathcal{G}}"] \\ \mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"'] & \mathcal{G}^+ \end{tikzcd}$$

Wir haben also insbesondere einen Funktor $-^+\colon \mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$.

Beweis. Wir konstruieren $\mathcal{F}^+$ folgendermaßen. Ist U offen in X, so sei $\mathcal{F}^+(U)$ die Menge der Abbildungen $s\colon U \to \bigcup_{p\in U} \mathcal{F}_p$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Für alle $p \in U$ gilt $s(p) \in F_p$
2. Für alle $p \in U$ gibt es eine offene Umgebung V von p in U und ein $t \in \mathcal{F}(V)$ mit $s(q) = t_q$ für alle $q \in V$.

Man sieht sofort, dass $\mathcal{F}^+$ mit Einschränkung von Funktionen als Restrinktionsabbildung eine abelsche Garbe ist. Weiter haben wir für alle U offen in X einen Morphismus

$$\theta_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U),\ s \mapsto \left(U \to \bigcup_{p\in U} \mathcal{F}_p,\ p \mapsto s_p\right),$$

der offensichtlich natürlich in U ist, also einen Morphismus $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$.

Wir wollen nun zuerst die beiden Eigenschaften zeigen, da die Aussage über die universelle Eigenschaft dann leicht folgt.

1. Ist $p \in X$, so betrachten wir den Morphismus $\theta_p \colon \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p^+$. Er ist injektiv, denn ist $[(U, s)] \in \ker(\theta_p)$, so gilt $[(U, \theta_U(s))] = 0$, also gibt es eine Umgebung V von p in U mit $\theta_U(s)|_V = 0$. Nach der Definition von θ gilt also $s_q = 0$ für alle $q \in V$ und damit insbesondere $[(U, s)] = s_p = 0$. Außerdem ist er surjektiv, denn ist $[(U, s)] \in \mathcal{F}_p^+$, so gibt es nach der Definition von $\mathcal{F}^+$ eine offene Umgebung V von p in U und ein $t \in \mathcal{F}(V)$ mit $s(q) = t_q$ für alle $q \in V$. Nach der Definition von θ gilt nun
$$\theta_p([(V, t)]) = [(V, \theta(t))] = [(U, s)],$$
wir haben also ein Urbild gefunden. Insgesamt erhalten wir also, dass θ_p ein Isomorphismus ist.

2. Sei nun $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Prägarben. Für U offen in X definieren wir die Abbildung
$$\varphi_U^+ \colon \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}^+(U),\ s \mapsto \left(U \to \bigcup_{p \in U} \mathcal{G}_p,\ p \mapsto \varphi_p(s(p)) \right).$$
Sei $p \in U$, dann gibt es eine offene Umgebung V von p in U und ein $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s(q) = t_q$ für alle $q \in V$. Dann gilt
$$(\varphi_U^+(s))(q) = \varphi_q(s(q)) = \varphi_q(t_q) = (\varphi_U(t))_q$$
für alle $q \in V$, also ist φ_U^+ wohldefiniert. Man erkennt sofort, dass dadurch ein Morphismus $\varphi^+ \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ gegeben ist, der das Diagramm aus der Behauptung kommutativ macht. Die Eindeutigkeit folgt aus der vorherigen Aussage und der Tatsache, dass zwei Morphismen von Garben übereinstimmen, wenn sie schon auf allen Halmen übereinstimmen.

Sei nun $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe und $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von abelschen Prägarben. Da $\theta_p^{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G}_p \to \mathcal{G}_p^+$ für alle $p \in X$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\theta^{\mathcal{G}}$ ein Isomorphismus, da er ein Morphismus von Garben ist und man die Eigenschaft eines Morphismus von Garben, ein Isomorphismus zu sein, auf den Halmen prüfen kann. Sei $\psi \colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ der Morphismus wie in 2., dann folgt aus 1. und 2. sofort, dass $(\theta^{\mathcal{G}})^{-1} \circ \psi$ der gesuchte eindeutige Morphismus ist. □

Korrolar 3.2. *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist die Garbifizierung*
$$-^+ \colon \mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$$
linksadjungiert zum Vergissfunktor
$$V \colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X),$$

das heißt es gibt einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X)}(\mathcal{F}, V(\mathcal{G})),$$

der natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist.

Beweis. Ein Morphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to V(\mathcal{G})$ entspricht dem Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ aus der universellen Eigenschaft der Garbifizierung in Proposition/Definition 3.1. Wir erhalten also in natürlicher Weise einen Morphismus von Garben $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$.

Sei also umgekehrt $\psi\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben, dann setzen wir einfach $\varphi = \psi \circ \theta$ und erhalten damit einen Morphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to V(\mathcal{G})$. Es ist klar, dass auch diese Konstruktion natürlich ist und man sieht auch sofort ein, dass beide Konstruktionen zueinander invers sind. □

Lemma 3.3. *Garbifizierung ist ein exakter Funktor, das heißt für jeden topologischen Raum X und jede kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

von abelschen Prägarben auf X ist

$$0 \to \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+ \to \mathcal{H}^+ \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf X.

Beweis. Ist

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Prägarben auf X, so ist

$$0 \to \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p \to 0$$

für alle $p \in X$ eine kuerze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Da die Halme der Garbifizierung einer Prägarbe nach Proposition/Definition 3.1 kanonisch Isomorph zu den Halmen der Prägarbe sind ist auch

$$0 \to \mathcal{F}_p^+ \to \mathcal{G}_p^+ \to \mathcal{H}_p^+ \to 0$$

für alle $p \in X$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Folglich ist

$$0 \to \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+ \to \mathcal{H}^+ \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von abelschen Garben auf X. □

Proposition 3.4. *Sei X ein topologischer Raum und $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein induktives System abelscher Garben auf X. Sei $\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha$, die Prägarbe, die durch die Vorschrift*

$$U \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$$

gegeben ist. Dann erfüllt die Garbifizierung dieser Prägarbe $(\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha)^+$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes, das heißt es gilt $(\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha)^+ = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$.

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe mit der Eigenschaft, dass es für alle $\alpha \in A$ Morphismen $\varphi_\alpha \colon \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G}$ gibt, die mit den Morphismen aus dem induktiven System kommutieren. Da Limiten und Kolimiten in der Kategorie der abelschen Prägarben punktweise berechnet werden, ist $\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha$ der direkte Limes des Systems in der Kategorie der Prägarben, das heißt, es gibt für alle $\alpha \in A$ Morphismen von Prägarben $\psi_\alpha \colon \mathcal{F}_\alpha \to \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha$ und einen eindeutigen Morphismus von Prägarben $\varphi\colon \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G}$ mit der Eigenschaft, dass folgendes Diagramm für alle $\alpha' \leq \alpha$ kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi_{\alpha'}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_{\alpha'}"] & & \\
& \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}_\alpha \arrow[ur, "\psi_\alpha"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sei nun $\theta\colon \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha \to (\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha)^+$ der kanonische Morphismus. Wegen der universellen Eigenschaft der Garbifizierung gibt es dann einen eindeutigen Morphismus

$$\overline{\varphi}\colon (\overset{\mathrm{pr}}{\varinjlim} \mathcal{F}_\alpha)^+ \to \mathcal{G},$$

der folgendes Diagramm für alle $\alpha' \leq \alpha$ kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi_{\alpha'}"] \arrow[drrr, bend left, "\varphi_{\alpha'}"] & & & \\
& \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha \arrow[r, "\theta"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & (\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha)^+ \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}_\alpha \arrow[ur, "\psi_\alpha"'] \arrow[urrr, bend right, "\varphi_\alpha"'] & & &
\end{tikzcd}$$

also erfüllt $(\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha)^+$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes. □

Definition 3.5. Seien X und Y topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei außerdem $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Dann definieren wir eine abelsche Garbe $f_*\mathcal{F}$ auf Y durch

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Es ist klar, dass dadurch tatsächlich eine Garbe definiert wird. Wir nennen $f_*\mathcal{F}$ die **direkte Bildgarbe** von $\mathcal{F}$ unter f. Ist $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus abelscher Garben auf X, so erhalten wir durch die Morphismen

$$(f_*\varphi)_U\colon \Big(f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))\Big) \to \Big(\mathcal{G}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{G}(U)\Big) \;\; s \mapsto \varphi(s)$$

einen Morphismus $f_*\varphi\colon f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ von abelschen Garben auf Y. Wir erhalten also offenbar einen Funktor

$$f_*\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(Y),$$

den wir **direkten Bildfunktor** nennen.

Ist $g\colon Y \to Z$ eine weitere stetige Abbildung, so gilt offensichtlich

$$g_*(f_*\mathcal{F}) = (g \circ f)_*\mathcal{F}.$$

Definition 3.6. Seien X und Y topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei außerdem $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf Y. Dann definieren wir eine abelsche Prägarbe $f^\dagger\mathcal{F}$ auf X durch

$$f^\dagger\mathcal{F}(U) = \varinjlim_{\substack{V \text{ offen in } Y \\ f(U)\subset V}} \mathcal{F}(V).$$

Sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus abelscher Garben auf Y, dann haben wir für alle U offen in X und V offen in Y mit $f(U) \subset V$ Morphismen

$$\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(V) \longrightarrow f^\dagger\mathcal{G}(U),$$

die offensichtlich mit den Morphismen aus dem induktiven System zu $f^\dagger\mathcal{G}(U)$ kommutieren. Wegen der universellen Eigenschaft des direkten Limes erhalten wir also Morphismen

$$(f^\dagger\varphi)_U\colon f^\dagger\mathcal{F}(U) \to f^\dagger\mathcal{G}(U)$$

und damit einen Morphismus

$$f^\dagger\varphi\colon f^\dagger\mathcal{F} \to f^\dagger\mathcal{G}.$$

Also haben wir einen Funktor

$$f^\dagger\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(Y) \to \mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X).$$

Wir definieren nun den **inversen Bildfunktor**

$$f^{-1}\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(Y) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$$

als Komoposition des Funktors $f^\dagger$ mit der Garbifizierung $-^+$. Wir nennen $f^{-1}\mathcal{F}$ die **inverse Bildgarbe** zu $\mathcal{F}$ unter f.

Lemma 3.7. *Seien X, Y und Z topologische Räume und seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetige Abbildungen. Seien weiter $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ abelsche Garben auf X beziehungsweise Y beziehungsweise Z und sei U offen in X.*

1. *Es gilt $f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H})) = (g \circ h)^{-1}\mathcal{H}$.*
2. *Es gilt $(f^{-1}\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)}$.*

Beweis. 1. Eine offene Menge $W \subset Z$ enthält $g(f(U))$ genau dann, wenn sie eine Menge der Form $g(V)$ enthält, wobei V offen in Y mit $f(U) \subset V$ ist. Es gilt also

$$f^\dagger(g^\dagger\mathcal{H})) = (g \circ h)^\dagger\mathcal{H}$$

und damit auch

$$f^{-1}(g^{-1}\mathcal{H})) = (g \circ h)^{-1}\mathcal{H}.$$

2. Ist $p \in X$ und $i\colon \{p\} \hookrightarrow X$ die Inklusion, so gilt

$$i^{-1}\mathcal{F}(\{p\}) = \varinjlim_{\substack{V \text{ offen in } X \\ i(\{p\}) \subset V}} \mathcal{F}(V) = \varinjlim_{\substack{V \text{ offen in } X \\ p \in V}} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_p,$$

da der topologische Raum $\{x\}$ trivial ist und somit $i^\dagger\mathcal{G}$ schon eine Garbe ist. Mit 1. folgt

$$(f^{-1}\mathcal{G})_p = i^{-1}(f^{-1}\mathcal{G})(\{p\}) = (f \circ i)^{-1}\mathcal{G}(\{p\}) = \varinjlim_{\substack{V \text{ offen in } Y \\ f(i(\{p\})) \subset V}} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(p)}.$$

□

Proposition 3.8. *Seien X und Y topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist der inverse Bildfunktor f^{-1} linksadjungiert zum direkten Bildfunktor f_*, das heißt es gibt einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}),$$

der natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist.

Beweis. Sei $\varphi\colon f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Morphismus von Garben auf X, V offen in Y und $t \in \mathcal{G}(V)$. Wegen $f(f^{-1}(V)) \subset V$ haben wir einen Morphismus $\iota_V\colon \mathcal{G}(V) \to f^\dagger\mathcal{G}(f^{-1}(V))$. Wir definieren nun ψ_V als den Morphismus

$$\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\iota_V} f^\dagger\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\theta_V} f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\varphi_{f^{-1}(V)}} \Big(\mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*\mathcal{F}(V)\Big)$$

und erhalten so einen Morphismus $\psi\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$.

Sei andererseits $\psi\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ ein Morphismus von Garben auf Y. Sei weiter U offen in X und $s \in f^\dagger\mathcal{G}(U)$. Ist V offen in Y mit $f(U) \subset V$, so gilt $U \subset f^{-1}(V)$. Sei V eine solche offene Menge, mit der Eigenschaft, dass es ein $s_v \in \mathcal{G}(V)$ gibt, das ein Repräsentant von s ist. Nun gilt $\psi_V(s_V) \in \big(f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))\big)$. Wir definieren nun

$$\varphi'_U \colon f^\dagger\mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U),\ s \mapsto \psi_V(s_V)|_U$$

und erhalten dadurch einen Morphismus $\varphi' \colon f^\dagger\mathcal{G} \to \mathcal{F}$. Durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung erhalten wir dann einen Morphismus $\varphi \colon f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Man sieht leicht, dass diese beiden Konstruktionen zueinander invers sind. Zu prüfen, dass sie natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ sind, ist ebenfalls einfach, allerdings etwas langwierig. weshalb hier auf die Darstellung verzichtet wird. □

Definition 3.9. Sei X ein topologischer Raum, $W \subset X$ offen und $Y \subset X$ abgeschlossen. Seien weiter $i \colon W \to X$ und $j \colon Y \to X$ die Inklusionen und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ abelsche Garben auf W beziehungsweise Y. Wir definieren eine abelsche Prägarbe $i_!\mathcal{F}^{\text{pr}}$ auf X durch

$$i_!\mathcal{F}^{\text{pr}}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V), & \text{falls } V \subset W \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Garbifizierung von $i_!\mathcal{F}^{\text{pr}}$ nennen wir **Fortsetzung von $\mathcal{F}$ durch Null** und bezeichnen sie mit $i_!\mathcal{F}$. Die direkte Bildgarbe $j_*\mathcal{G}$ bezeichnen wir ebenfalls mit Fortsetzung von $\mathcal{G}$ durch Null. Ist $\mathcal{H}$ eine abelsche Garbe auf X, so schreiben wir oft auch $\mathcal{H}_W$ anstatt von $i_!(\mathcal{H}|_W)$ und $\mathcal{H}_Y$ anstatt von $j_*(\mathcal{H}|_Y)$.

Lemma 3.10. *Mit den Voraussetzungen aus Definition 3.9 gilt*

$$(j_*\mathcal{G})_p = \begin{cases} \mathcal{G}_p, & \textit{falls } p \in Y \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$(i_!\mathcal{F})_p = \begin{cases} \mathcal{F}_p, & \textit{falls } p \in W \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Sei $p \in Y$, dann gilt

$$(j_*\mathcal{G})_p = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} (j_*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} \mathcal{G}(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} \mathcal{G}(U \cap Y) = \mathcal{G}_p.$$

Sei nun $V = X \setminus Y$ und $p \in V$. Sei weiter $[(U, s)] \in (j_*\mathcal{G})_p$. Ohne Einschränkung sei $U \subset V$, denn es gilt $[(U, s)] = [(U \cap V, s|_{U \cap V})]$. Also gilt

$$(j_*\mathcal{G})(U) = \mathcal{G}(j^{-1}(U)) = \mathcal{G}(\emptyset) = 0,$$

und es folgt $[(U, s)] = 0$.

Sei nun $p \in W$, dann gilt

$$(i_!\mathcal{F})_p = (i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}})_p = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} (i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}})(U) = \varinjlim_{\substack{U \subset W \text{ offen} \\ p \in U}} \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_p.$$

Ist andererseits $p \in X \setminus W$, so gilt $i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}(U) = 0$ für alle offenen $U \subset X$ mit $p \in U$ und es folgt

$$(i_!\mathcal{F})_p = (i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}})_p = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} (i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}})(U) = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ offen} \\ p \in U}} 0 = 0.$$

□

Lemma 3.11. *Sei X ein topologischer Raum, $U \subset X$ offen und $i\colon U \to X$ die Inklusion. Sei außerdem $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf U und $\mathcal{G}$ eine abelsche Garbe auf X. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}(i_!\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, i^{-1}\mathcal{G}),$$

der natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist, das heißt, $i_!$ ist linksadjungiert zu i^{-1}.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(i_!\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Durch die Adjunktion von Garbifizierung und Vergissfunktor erhalten wir einen Morphismus von Prägarben

$$\varphi'\colon i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{G}.$$

Für offene Mengen $V \subset U$ gilt $i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}(V) = \mathcal{F}(V)$ und $\mathcal{G}(V) = i^{-1}\mathcal{G}(V)$, wir haben also Morphismen

$$\varphi'_V\colon \mathcal{F}(V) \to i^{-1}\mathcal{G}(V),$$

die natürlich in V sind. Somit erhalten wir einen Morphismus von Garben

$$\overline{\varphi}\colon \mathcal{F} \to i^{-1}\mathcal{G}.$$

Ist andererseits $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, i^{-1}\mathcal{G})$, so definieren wir einen Morphismus $\psi'\colon i_!\mathcal{F}^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{G}$ von Prägarben durch

$$\psi'_V = \begin{cases} \psi_V, & \text{falls } V \subset U \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Durch Garbifizierung erhalten wir einen Morphismus $i_!\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Garben.

Diese beiden Konstruktionen sind offensichtlich zueinander invers und natürlich in $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$. □

Lemma 3.12. *Seien $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf einem topologischen Raum X, $U \subset X$ offen, $Y = X \setminus U$ und $i\colon U \to X$ und $j\colon Y \to X$ die Inklusionen. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0.$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{F}|_U = i^{-1}\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}|_Y = j^{-1}\mathcal{F}$. Wegen der Adjunktion zwischen j^{-1} und j_* erhalten wir also

$$\mathrm{Hom}(j^{-1}\mathcal{F}, j^{-1}\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_Y)$$

und wegen der Adjunktion zwischen $i_!$ und i^{-1} erhalten wir

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(i^{-1}\mathcal{F}, i^{-1}\mathcal{F}).$$

Wir erhalten dadurch kanonische Morphismen $\alpha\colon \mathcal{F}_U \to \mathcal{F}$ und $\beta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y$, die jeweils mittels der entsprechenden Adjunktionsabbildung von der Identität kommen. Wir wollen nun die Exaktheit der Sequenz, die wir dadurch erhalten, zeigen. Dazu genügt es, die Exaktheit auf den Halmen nachzuweisen, wir betrachten also die Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathcal{F}_U)_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{F}_p \xrightarrow{\beta_p} (\mathcal{F}_Y)_p \longrightarrow 0$$

für $p \in X$.

Ist $p \in U$, so gilt

$$(\mathcal{F}_U)_p = (\mathcal{F}|_U)_p = \mathcal{F}_p$$

nach Lemma 3.10. Da Garbifizierung die Halme unverändert lässt gilt $\alpha_p = \alpha_p^{\mathrm{pr}}$, wobei α^{pr} der Prägarbenmorphismus wie ψ' in Lemma 3.11 ist, den wir dort verwendet haben, um einen Morphismus wie α zu konstruieren. Ist $V \subset U$ offen, so gilt außerdem $\alpha_V^{\mathrm{pr}} = \mathrm{id}$ nach der Konstruktion in Lemma 3.11 und wir erhalten

$$\alpha_p = \alpha_p^{\mathrm{pr}} = \varinjlim_{\substack{p \in V \\ V \text{ offen in } X}} \alpha_V^{\mathrm{pr}} = \varinjlim_{\substack{p \in V \\ V \text{ offen in } U}} \alpha_V^{\mathrm{pr}} = \varinjlim_{\substack{p \in V \\ V \text{ offen in } U}} \mathrm{id} = \mathrm{id}\,.$$

Es gilt jedoch $p \notin Y$ und mit Lemma 3.10 erhalten wir $(\mathcal{F}_Y)_p = 0$ und damit $\beta_p = 0$. Also ist die Sequenz in diesem Fall exakt.

Ist andererseits $p \in Y$, so gilt $p \notin U$ und mit Lemma 3.10 erhalten wir $(\mathcal{F}_U)_p = 0$ und damit $\alpha_p = 0$. Nach Lemma 3.10 gilt auch $(\mathcal{F}_Y)_p = \mathcal{F}_p$. Es sei $\theta\colon j^\dagger\mathcal{F} \to j^{-1}\mathcal{F}$ der kanonische Morphismus. Für V offen in X haben wir einen kanonischen Morphismus

$$\iota_V : \mathcal{F}(V) \to j^\dagger\mathcal{F}(j^{-1}(V)),\ s \mapsto \overline{s},$$

der durch die Verknüpfung von Inklusion und Restklassenbildung gegeben ist. Der Morphismus β ist nun durch Morphismen

$$\beta_V : \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\iota_V} j^\dagger\mathcal{F}(j^{-1}(V)) \xrightarrow{\theta_V} j^{-1}\mathcal{F}(j^{-1}(V)) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{F}_Y(V)$$

gegeben. Sei $s_p = [(V, s)] \in \mathcal{F}_p$. Der Isomorphismus der Halme $(j^{-1}\mathcal{F})_p$ und $(j^\dagger\mathcal{F})_p$ wird von θ induziert. Deswegen und wegen der Definition der ι_V gilt

$$\beta_p(s_p) = [(V, \mathrm{id} \circ \theta \circ \iota_V(s))] = [(V, \theta \circ \iota_V(s))] = [(V, \iota_V(s))] = s_p.$$

Demnach ist β_p die Identität und damit ist die Sequenz auch in diesem Fall exakt. $\square$

4 Garbenkohomologie

In diesem Kapitel wollen wir Garbenkohomologie definieren und einige grundlegende Eingeschaften untersurchen. Wir werden dabei etliche Beweise überspringen, da sie für das Verständnis keine große Rolle spielen und über den Rahmen dieser Arbeit hinaus gehen.

Definition 4.1. Eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ hat **genügend Injektive**, wenn es für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ ein injektives Objekt I und einen Monomorphismus $i : A \hookrightarrow I$ gibt.

Definition 4.2. Sei A ein Objekt in der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Eine **Auflösung** von A ist ein Komplex $I^\cdot$ in $\mathcal{A}$ mit $I^n = 0$ für $n < 0$ zusammen mit einem Monomorphismus $\varepsilon\colon A \to I^0$ mit der Eigenschaft, dass die Sequenz

$$\cdots \to 0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

exakt ist. Eine Auflösung $I^\cdot$ von A heißt **injektiv**, wenn I^n für alle $n \geq 0$ injektiv ist.

Proposition 4.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.*

1. *Hat $\mathcal{A}$ genügend Injektive, so besitzt jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.*
2. *Seien A und B in $\mathcal{A}$. Ist $\varepsilon : A \to I^\cdot$ eine beliebige Auflösung und $\eta : B \to J^\cdot$ eine injektive Auflösung und ist $u : A \to B$ ein Morphismus, so gibt es einen Morphismus von Komplexen $f : I^\cdot \to J^\cdot$, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^\cdot \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow[\eta]{} & J^\cdot \end{array}$$

kommutativ macht.

Beweis. 1. Es sei bereits

$$0 \overset{d^{-2}}{\to} A \overset{d^{-1}}{\to} I^0 \overset{d^0}{\to} \cdots \overset{d^{n-2}}{\to} I^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} I^n$$

exakt konstruiert, wobei I^k injektiv sei für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$. Da $\mathcal{A}$ genügend Injektive hat, gibt es ein injektives Objekt I^{n+1} und einen Monomorphismus

$$\operatorname{coker}(d^{n-1}) \hookrightarrow I^{n+1}.$$

Ist nun d^n die Komposition $I^n \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(d^{n-1}) \hookrightarrow I^n$, so ist

$$0 \xrightarrow{d^{-2}} A \xrightarrow{d^{-1}} I^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} I^n \xrightarrow{d^n} I^{n+1}$$

exakt.

2. Da ε^0 ein Monomorphismus ist und J^0 injektiv ist, gibt es einen Morphismus $f^0\colon I^0 \to J^0$ mit $f^0\varepsilon^0 = \eta^0 u$. Sei nun $n \geq 0$ und bereits ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon^0"] \arrow[d, "u"'] & I^0 \arrow[r, "d_I^0"] \arrow[d, "f^0"] & \cdots \arrow[r, "d_I^{n-1}"] & I^n \arrow[d, "f^n"] \\ B \arrow[r, "\eta^0"'] & J^0 \arrow[r, "d_J^0"'] & \cdots \arrow[r, "d_J^{n-1}"'] & J^n \end{tikzcd}$$

konstruiert. Außerdem sei $\overline{f^n}\colon \operatorname{coker}(d_I^n) \to \operatorname{coker}(d_J^n)$ der von f^n induzierte Morphismus. Der von d_I^n induzierte Morphismus $\overline{d_I^n}\colon \operatorname{coker}(d_I^n) \to I^{n+1}$ ist ein Monomorphismus. Deswegen, und weil J^{n+1} injektiv ist, gibt es einen Morphismus $f^{n+1}\colon I^{n+1} \to J^{n+1}$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f^n"'] & \operatorname{coker}(d_I^n) \arrow[r, hook, "\overline{d_I^n}"] \arrow[d, "\overline{f^n}"] & I^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ J^n \arrow[r, two heads] & \operatorname{coker}(d_J^n) \arrow[r, hook, "\overline{d_J^n}"'] & J^{n+1} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Insgesamt erhalten wir also einen Morphismus von Komplexen $f\colon I^\cdot \to J^\cdot$ wie gewünscht.

$\square$

Definition 4.4. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend Injektive. Für $i \in \mathbb{Z}$ ist dann der i-te **rechtsabgeleitete Funktor** $R^iF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ auf folgende Weise definiert:

1. Für ein Objekt A in $\mathcal{A}$ wählen wir eine injektive Auflösung $A \to I^\cdot$ und setzen

$$R^iF(A) = h^i(F(I^\cdot)).$$

2. Für einen Morphismus $u : A \to B$ in $\mathcal{A}$ wählen wir eine Fortsetzung

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & I^\cdot \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & J^\cdot \end{tikzcd}$$

auf den gewählten injektiven Auflösungen und definieren

$$R^iF(u) = h^i(F(f)).$$

Theorem 4.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, die genügend Injektive besitzt und sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$.*

1. *Für alle $i \geq 0$ ist R^iF ein additiver Funktor und unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösungen.*
2. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $F \cong R^0F$.*
3. *Für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ und alle $i \geq 0$ gibt es einen natürlichen Morphismus $\delta^i\colon R^if(A'') \to R^{i+1}F(A')$ und wir erhalten eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \longrightarrow R^iF(A') \longrightarrow R^iF(A) \to R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \to R^{i+1}F(A) \to \ldots.$$

4. *Für einen Morphismus von der exakten Sequenz aus 3. in eine weitere exakte Sequenz $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ erhalten wir für alle $i \geq 0$ folgendes kommutatives Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^iF(B'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1}F(B') \end{array}$$

5. *Für alle injektiven Objekte I in $\mathcal{A}$ und alle $i \geq 0$ gilt $R^iF(I) = 0$.*

Beweis. [Har77, Theorem III.1.1A]. □

Definition 4.6. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend Injektive. Ein Objekt $J \in \mathcal{A}$ heißt **azyklisch** für F, falls $R^iF(J) = 0$ für alle $i > 0$ gilt.

Proposition 4.7. *Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend Injektive. Sei $A \in \mathcal{A}$ und $J^\cdot$ F-azyklische Auflösung von A, das heißt $J^\cdot$ ist eine Auflösung von A mit der Eigenschaft, dass J^i für alle $i \geq 0$ azyklisch für F ist. Für alle $i \geq 0$ gibt es dann einen natürlichen Isomorphismus $R^iF(A) \cong h^i(F(J^\cdot))$.*

Beweis. [Har77, Proposition III.1.2A]. □

Definition 4.8. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Ein **δ-Funktor** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Familie von Funktoren $T = (T^i)_{i\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass es für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ und alle i ≥ 0 Morphismen $\delta^i\colon T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$ gibt, die folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Für jede kurze exakte Sequenz wie oben ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow T^0(A') \longrightarrow T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \to \ldots$$

exakt.

2. Für jeden Morphismus von einer kurzen exakten Sequenz wie oben in eine andere kurze exakte Sequenz $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ ist folgendes Diagramm für alle $i \geq 0$ kommutativ:

$$\begin{tikzcd} T^i(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & T^{i+1}(A') \arrow[d] \\ T^i(B'') \arrow[r, "\delta^i"] & T^{i+1}(B') \end{tikzcd}$$

Definition 4.9. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Ein δ-Funktor

$$\Big((T = (T^i)_{i\geq 0}\Big) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

heißt **universell**, wenn Folgendes gilt: Für jeden anderen δ-Funktor

$$\Big((T' = ({T'}^i)_{i\geq 0}\Big) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

und jeden Morphismus $f^0 \colon T^0 \to {T'}^0$ gibt eine eindeutige, $\mathbb{N}$-indizierte und mit dem gegebenen f^0 beginnende Familie von Morphismen $(f^i \colon T^i \to {T'}^i)_{i\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass die Morphismen für jede kurze exakte Sequenz mit den δ^i kommutieren.

Lemma 4.10. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $T = (T^i)_{i\geq 0}$ und $T' = ({T'}^i)_{i\geq 0}$ universelle δ-Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit der Eigenschaft, dass es einen Isomorphismus $f \colon T^0 \to {T'}^0$ gibt. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus von δ-Funktoren $(f^i)_{i\geq 0} \colon T \to T'$ mit $f^0 = f$.*

Beweis. Da die beiden δ-Funktoren universell sind, gibt es für die Isomorphismen

$$f^0 \colon T^0 \to {T'}^0$$

und

$$(g^0 = (f^0)^{-1}) \colon {T'}^0 \to T^0$$

eindeutige Familien von Morphismen

$$f^i \colon T^i \to {T'}^i$$

und

$$g^i \colon {T'}^i \to T^i,$$

die mit f^0 beziehungsweise g^0 beginnen und für jede exakte Sequenz mit den Verbindungsmorphismen der beiden δ-Funktoren kommutieren. Da $\mathrm{id} \colon T \to T$ der eindeutige Morphismus, der $(g \circ f = \mathrm{id}) \colon T^0 \to T^0$ fortsetzt, und Analoges für T' gilt, erhalten wir für alle $i \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd} T^i \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ {T'}^i \arrow[r, "g^i"'] & T^i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {T'}^i \arrow[d, "g^i"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ T^i \arrow[r, "f^i"'] & {T'}^i \end{tikzcd}$$

Es gilt also $f^i \circ g^i = \mathrm{id}$ und $g^i \circ f^i = \mathrm{id}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und demnach ist $(f^i)_{i\geq 0}$ ein Isomorphismus wie gewünscht. Die Eindeutigkeit ist klar. □

Definition 4.11. Ein additiver Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen abelschen Kategorien heißt **auslöschbar**, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ und einen Monomorphismus $u\colon A \to M$ mit $F(u) = 0$ gibt.

Theorem 4.12. *Sei $T = (T^i)_{i\geq 0}$ ein δ-Funktor zwischen den abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Ist T^i für alle $i > 0$ auslöschbar, so ist T universell.*

Beweis. [Gro57, II, Proposition 2.2.1]. □

Korrolar 4.13. *Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien und $\mathcal{A}$ habe genügend Injektive. Dann ist $(R^iF)_{i\geq 0}$ ein universeller δ-Funktor.*

Beweis. Aus Theorem 4.5 folgt sofort, dass $(R^iF)_{i\geq 0}$ ein δ-Funktor ist. Ist $A \in \mathcal{A}$, so sei $u\colon A \to I$ ein Monomorphismus von A in ein injektives Objekt I. Nach Theorem 4.5 gilt dann $R^iF(I) = 0$ für alle $i > 0$ und damit auch $R^iF(u) = 0$ für alle $i > 0$. Also ist R^iF für alle $i > 0$ auslöschbar und damit ist $(R^iF)_{i\geq 0}$ nach Theorem 4.12 universell. □

Proposition 4.14. *Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$ eine abelsche Kategorie, die genügend Injektive hat.*

Beweis. [Har77, Example III.1.0.3] und [Har77, Corollary III.2.3]. □

Lemma 4.15. *Sei X ein topologischer Raum, dann ist der globale Schnitte Funktor $\Gamma(X, -)\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Ab}$ linksexakt.*

Beweis. Der globale Schnitte Funktor $\Gamma(X, -)$ ist gegeben durch die Komposition

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \xrightarrow{\;V\;} \mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X) \xrightarrow{\;G\;} \mathrm{Ab}$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(X),$$

wobei V der Vergissfunktor und G die Auswertung auf X ist. Der Vergissfunktor V ist rechtsadjungiert, erhält also Limiten und insbesondere auch Kerne. Deswegen ist V linksexakt. Limiten und Kolimiten werden in $\mathrm{PSh}_{\mathrm{Ab}}(X)$ punktweise berechnet, also erhält G diese und insbesondere auch Kerne und Kokerne. Also ist G exakt und damit ist $\Gamma(X, -)$ linksexakt. □

Definition 4.16. Sei X ein topologischer Raum. Für $i \geq 0$ definieren wir den i-ten Kohomologie Funktor $H^i(X, -)\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}} \to \mathrm{Ab}$ als den i-ten rechtsabgeleiteten Funktor $R^i\Gamma(X, -)$ des globalen Schnitte Funktors. Ist $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X, so nennen wir $H^i(X, \mathcal{F})$ die i-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$.

Definition 4.17. Sei X ein topologischer Raum. Eine abelsche Garbe auf X heißt **welk**, wenn alle Restriktionsabbildungen surjektiv sind.

Proposition 4.18. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine welke Garbe abelscher Gruppen auf X. Dann gilt $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$, das heißt $\mathcal{F}$ ist $\Gamma(X, -)$-azyklisch.*

Beweis. [Har77, Proposition III.2.5]. □

Proposition 4.18 liefert uns zusammen mit Proposition 4.7, dass wir auch welke Auflösungen verwenden können, um Garbenkohomologie zu berechnen.

Lemma 4.19. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Ist $U \subset X$ offen, so definieren wir*

$$\mathcal{G}(U) = \left\{ s \colon U \to \bigcup_{p \in U} \mathcal{F}_p \;\middle|\; \text{für alle } p \in U \text{ gilt } s(p) \in \mathcal{F}_p \right\}.$$

*Dies definiert eine welke Garbe auf X, die wir **Garbe der unstetigen Schnitte von** $\mathcal{F}$ nennen. Ist außerdem $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ein Morphismus von abelschen Garben auf X, so erhalten wir einen Morphismus $\psi' \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$. Somit erhalten wir einen Funktor*

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$$

Zusätzlich gibt es einen Monomorphismus $\varphi^{\mathcal{F}} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, der funktoriell in $\mathcal{F}$ ist, das heißt für jeden Morphismus $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi^{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\psi'"] \\ \mathcal{F}' \arrow[r, "\varphi^{\mathcal{F}'}"'] & \mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis. Sei $U \subset X$ offen, dann wird $\mathcal{G}(U)$ durch punktweise Verknüpfung auf den Halmen zu einer abelschen Gruppe. Ist $V \subset U$ offen in X, so definieren wir die Restriktionsabbildung durch

$$\rho_{UV} \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V), \; s \mapsto s|_V.$$

Sie ist offenbar wohldefiniert und surjektiv. Es ist nun offensichtlich, dass die Garbenaxiome erfüllt sind.

Ist nun $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ein Morphismus von abelschen Garben, so definieren wir $\psi' \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ durch

$$\psi'_U \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}'(U), \; s \mapsto \psi_p(s(p)).$$

Offensichtlich erhalten wir somit einen Funktor.

Wir definieren einen Morphismus von Garben $\varphi^{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ durch

$$\varphi_U^{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U),\ t \mapsto \left(s\colon U \to \bigcup_{p\in U} \mathcal{F}_p,\ p \mapsto t_p\right).$$

Die Eigenschaft eines Garbenmorphismus, ein Monomorphismus zu sein, lässt sich auf offenen Mengen prüfen. Sei also $U \subset X$ offen und sei $t \in \ker(\varphi_U)$. Dann gilt für alle $p \in U$ schon $t_p = 0$, also $t = 0$ und damit ist φ_U ein Monomorphismus.

Ist nun $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ ein Morphismus abelscher Garben auf X, so gilt für alle U offen in X, $s \in \mathcal{F}(U)$ und $p \in U$

$$\psi(s)_p = \psi_p(s_p)$$

und damit folgt sofort

$$\varphi^{\mathcal{F}'} \circ \psi = \psi' \circ \varphi^{\mathcal{F}}.$$

□

Bemerkung 4.20. Nach Lemma 4.19 gibt es also zu jeder abelschen Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X einen Monomorphismus $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ in eine welke Garbe $\mathcal{G}$ auf X. Analog zu Proposition 4.3 zeigt man nun mit der Konstruktion aus Lemma 4.19, dass jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X eine welke Auflösung hat.

Lemma 4.21. *Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ abgeschlossen, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf Y und $j\colon Y \to X$ die Inklusion. Dann gilt*

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$$

für alle $i \geq 0$.

Beweis. Ist $\mathcal{G}$ eine welke Garbe auf Y, so ist $j_*\mathcal{G}$ eine welke Garbe auf X, denn für alle $V \subset U$ offen in X ist die Restriktionsabbildung

$$\left(\rho_{UV}^{j_*\mathcal{G}} = \rho_{(U\cap Y)(V\cap Y)}^{\mathcal{G}}\right)\colon \left(j_*\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(U \cap Y)\right) \to \left(j_*\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}(V \cap Y)\right)$$

surjektiv, da $\mathcal{G}$ welk ist. Ist außerdem

$$\mathcal{H} \to \mathcal{I} \to \mathcal{J}$$

eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf Y, dann ist

$$j_*\mathcal{H} \to j_*\mathcal{I} \to j_*\mathcal{J}$$

nach Lemma 3.10 eine exakte Sequenz von abelschen Garben auf X, da die Halme der direkten Bildgarben im Fall $p \in Y$ jeweils mit den Halmen der Garben übereinstimmen und auch die Morphismen zwischen den Halmen übereinstimmen. Andernfalls sind die Halme 0 und die Sequenz ist trivialerweise exakt.

Sei nun $\mathcal{J}^{\cdot}$ eine welke Auflösung von $\mathcal{F}$. Dann ist nach den obigen Resultaten $j_*\mathcal{J}^{\cdot}$ eine welke Auflösung von $j_*\mathcal{F}$ und für alle $i \geq 0$ gilt

$$\Gamma(Y, \mathcal{J}^i) = \Gamma(X, j_*\mathcal{J}^i).$$

Außerdem stimmen auch die Korandabbildungen der Komplexe überein. Damit erhalten wir

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = h^i\Big(\Gamma(Y, \mathcal{J}^{\cdot})\Big) = h^i\Big(\Gamma(X, j_*\mathcal{J}\cdot)\Big) = H^i(X, j_*\mathcal{F}).$$

$\square$

Manchmal schreibt man anstatt von $j_*\mathcal{F}$ einfach nur $\mathcal{F}$. Lemma 4.21 rechtfertigt diesen Missbrauch von Notation.

5 Garbenkohomologie auf noetherschen topologischen Räumen und der Verschwindungssatz

Wir wollen nun die Garbenkohomologie auf noetherschen topologischen Räumen untersuchen. Insbesondere werden wir zeigen, dass Kohomologie in diesem Fall mit direkten Limiten vertauscht. Außerdem beweisen wir den Hauptsatz der Arbeit.

Lemma 5.1. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum und $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein induktives System von Garben auf X. Dann ist die Prägarbe $\varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha$ schon eine Garbe, es gilt also $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha = \varinjlim^{\mathrm{pr}} \mathcal{F}_\alpha$. Insbesondere gilt $\Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_\alpha)$.*

Beweis. Sind $\beta \leq \gamma \in A$, so bezeichnen wir den Morphismus $\mathcal{F}_\beta \to \mathcal{F}_\gamma$ aus dem induktiven System mit $\varphi^{\beta\gamma}$. Wir zeigen nun, dass die beiden Garbenaxiome erfüllt sind.

Separiertheit. Sei $U \subset X$ offen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U. Sei weiter $s \in \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$ mit $s|_{U_i} = 0$ für alle $i \in I$. Da X noethersch ist, ist U kompakt, es gibt also eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in J}$ von U, wobei $J \subset I$ endlich ist. Sei $s^\beta \in \mathcal{F}_\beta(U)$ ein Vertreter von s, dann ist $s^\beta|_{U_i}$ für alle $i \in J$ ein Vertreter von $s|_{U_i}$. Da auch $0 \in \mathcal{F}_\beta(U_i)$ ein Vertreter von $s|_{U_i}$ ist, gibt es ein $\alpha_i \geq \beta$ mit

$$\varphi_U^{\beta\alpha_i}(s^\beta)|_{U_i} = \varphi_{U_i}^{\beta\alpha_i}(s^\beta|_{U_i}) = \varphi_{U_i}^{\beta\alpha_i}(0) = 0.$$

Wir wählen nun ein $\gamma \in A$ mit $\gamma \geq \alpha_i$ für alle $i \in J$. Dann gilt für alle $i \in J$ wegen obiger Gleichung

$$\varphi_U^{\beta\gamma}(s^\beta)|_{U_i} = 0.$$

Da $\mathcal{F}_\gamma$ eine Garbe ist, folgt

$$\varphi^{\beta\gamma}(s^\beta) = 0$$

und damit sofort $s = 0$.

Verklebeeigenschaft. Sei U offen in X, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U und seien $s_i \in \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U_i)$ mit $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Nach dem gleichen Argument wie oben gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in J}$ von U, wobei $J \subset I$ endlich ist. Für alle $i \in I$ sei $s_i^{\beta_i} \in \mathcal{F}_{\beta_i}(U_i)$ ein Vertreter von s_i, dann ist $s_i^{\beta_i}|_{U_i\cap U_j}$ ein Vertreter von $s_i|_{U_i\cap U_j}$. Also gibt es ein $\alpha_{ij} \geq \beta_i, \beta_j$ mit

$$\varphi_{U_i}^{\beta_i\alpha_{ij}}(s_i^{\beta_i})|_{U_i\cap U_j} = \varphi_{U_i\cap U_j}^{\beta_i\alpha_{ij}}(s_i^{\beta_i}|_{U_i\cap U_j}) = \varphi_{U_i\cap U_j}^{\beta_j\alpha_{ij}}(s_j^{\beta_j}|_{U_i\cap U_j}) = \varphi_{U_j}^{\beta_j\alpha_{ij}}(s_j^{\beta_j})|_{U_i\cap U_j}.$$

Wir wählen nun ein $\gamma \in A$ mit $\gamma \geq \alpha_{ij}$ für alle $i, j \in J$. Dann gilt für alle $i, j \in J$ wegen obiger Gleichung

$$\varphi_{U_i}^{\beta_i\gamma}(s_i^{\beta_i})|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{U_j}^{\beta_i\gamma}(s_j^{\beta_j})|_{U_i \cap U_j}.$$

Da $\mathcal{F}_\gamma$ eine Garbe ist, gibt es ein $s^\gamma \in \mathcal{F}_\gamma(U)$ mit $s^\gamma|_{U_i} = \varphi_{U_i}^{\beta_i\gamma}(s_i^{\beta_i})$ für alle $i \in J$. Sei nun $s = \overline{s^\gamma} \in \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)$, dann gilt für alle $i \in J$

$$s|_{U_i} = \overline{s^l}|_{U_i} = \overline{s^l|_{U_i}} = \overline{\varphi_{U_i}^{\beta_i\gamma}(s_i^{\beta_i})} = s_i.$$

Ist nun $i \in I$, dann ist $(U_i \cap U_j)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von U_i und es gilt

$$(s|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} = (s|_{U_j})|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} = s_i|_{U_i \cap U_j}.$$

für alle $j \in J$. Wegen der Separiertheit folgt also $s|_{U_i} = s_i$.

□

Lemma 5.2. *Auf einem noetherschen topologischen Raum ist der induktive Limes welker Garben welk.*

Beweis. Sei $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein induktives System welker Garben. Dann ist der Morphismus $\mathcal{F}_\alpha(U) \to \mathcal{F}_\alpha(V)$ für alle offenen Mengen $V \subset U \subset X$ und alle $\alpha \in A$ surjektiv. Nach Lemma 5.1 gilt $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha(W) = (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(W)$ für alle offenen $W \subset X$. Außerdem vertauschen Kolimiten miteinander, insbesondere vertauschen also direkte Limiten und Kokerne miteinander und deswegen ist auch der Morphismus

$$\Big((\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(U) = \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(U)\Big) \to \Big(\varinjlim \mathcal{F}_\alpha(V) = (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(V)\Big)$$

surjektiv. Folglich ist $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ welk. □

Proposition 5.3. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum und sei $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein induktives System von abelschen Garben. Dann gibt es für alle $i \geq 0$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha).$$

Beweis. Für alle $\alpha \in A$ gibt es einen natürlichen Morphismus $\mathcal{F}_\alpha \to \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ und durch Anwenden des i-ten Kohomologiefunktors erhalten wir eine Abbildung

$$H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha).$$

Die universelle Eigenschaft des direkten Limes liefert uns also einen Morphismus

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha).$$

Im Fall $i = 0$ wissen wir bereits, dass dieser ein natürlicher Isomorphismus ist, denn nach Lemma 5.1 gilt

$$\varinjlim H^0(X, \mathcal{F}_\alpha) = \varinjlim \Gamma(X, \mathcal{F}_\alpha) = \Gamma(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) = H^0(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha).$$

Im allgemeinen Fall betrachten wir die Kategorie $\operatorname{ind}_A(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X))$ der A-indizierten induktiven Systeme abelscher Garben auf X. Aus der Tatsache, dass $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X)$ eine abelsche Kategorie ist, folgt leicht, dass auch $\operatorname{ind}_A(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X))$ eine abelsche Kategorie ist. Da die Funktoren H^i einen δ-Funktor bilden und $\varinjlim$ ein exakter Funktor ist, bilden auch $\varinjlim H^i(X, -)$ und $H^i(X, \varinjlim -)$ jeweils δ-Funktoren. Wir wollen nun zeigen, dass $\varinjlim H^i(X, -)$ und $H^i(X, \varinjlim -)$ für $i > 0$ auslöschbar sind. Nach 4.12 sind die beiden δ-Funktoren dann universell und nach Lemma 4.10 isomorph.

Sei also $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A} \in \operatorname{ind}_A(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X))$ und $i > 0$. Für $\alpha \in A$ sei dann $\mathcal{G}_\alpha$ die Garbe der unstetigen Schnitte von $\mathcal{F}_\alpha$. Nach Lemma 4.19 ist $\mathcal{G}_\alpha$ welk und es gibt einen Monomorphismus $\mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G}_\alpha$, der funktoriell in $\mathcal{F}_\alpha$ ist. Somit erhalten wir einen Monomorphismus $u\colon (\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in A} \to (\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\operatorname{ind}_A(\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X))$. Da $\mathcal{G}_\alpha$ welk ist, gilt $H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$ und damit auch $\varinjlim H^i(X, \mathcal{G}_\alpha) = 0$, also ist $\varinjlim H^i(X, -)$ auslöschbar. Nach Lemma 5.2 ist aber auch $\varinjlim \mathcal{G}_\alpha$ welk, also ist nach dem gleichen Argument wie gerade auch $H^i(X, \varinjlim)$ auslöschbar. □

Definition 5.4. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Sei weiter

$$B = \coprod_{U \subset X \text{ offen}} \mathcal{F}(U)$$

und

$$A = \{\alpha \subset B \mid |\alpha| < \infty\}$$

die Menge aller endlichen Teilmengen von B. Sei $\alpha \in A$, dann hat α für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$, eine geeignete Familie $(U_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ und ein geeignetes $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ die Form

$$\{(U_1, t_1), \ldots, (U_n, t_n)\}.$$

Ist U offen in X, so wird durch

$$\mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}}(U) = \begin{cases} \langle t_i|_U \mid U \subset U_i, i \in \{1,\ldots,n\}\rangle, & \text{falls es ein } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } U \subset U_i \text{ gibt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Prägarbe definiert, deren Garbifizierung $\mathcal{F}_\alpha$ wir die **von den Schnitten aus** α **erzeugte Untergarbe von** $\mathcal{F}$ nennen.

Lemma 5.5. *Seien X, $\mathcal{F}$ und A wie in Definition 5.4. Für alle $\alpha' \subset \alpha \in A$ erhalten wir durch die Inklusion einen Morphismus $\mathcal{F}_{\alpha'}^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}}$ und damit durch Garbifizierung einen Morphismus $\mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha$, also ein induktives System von Garben. Es gilt*

$$\varinjlim \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}.$$

Beweis. Wir wollen nachweisen, dass $\mathcal{F}$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes erfüllt. Sei also $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und für alle $\alpha \in A$ seien Morphismen $\varphi_\alpha \colon \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G}$ gegeben, die für alle $\alpha' \subset \alpha$ mit den Morphismen $\mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha$ kommutieren, das heißt, für alle $\alpha' \subset \alpha$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[dd] \arrow[dr, "\varphi_{\alpha'}"] & \\
 & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}_\alpha \arrow[ur, "\varphi_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Durch die Adjunktion von Garbifizierung und Vergissfunktor erhalten wir Morphismen von Prägarben $\varphi_\alpha^{\mathrm{pr}} \colon \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{G}$. Wir definieren nun für alle $\alpha \in A$ durch

$$(\psi_\alpha^{\mathrm{pr}})_U \colon \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}}(U) \to \mathcal{F}(U),\ s \mapsto s$$

einen Morphismus $\psi_\alpha^{\mathrm{pr}} \colon \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{F}$ von Prägarben auf X. Offensichtlich kommutieren diese Morphismen für alle $\alpha' \subset \alpha \in A$ mit den Morphismen $\mathcal{F}_{\alpha'}^{\mathrm{pr}} \to \mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}}$. Ist nun $U \subset X$ offen, so gibt es für alle $s \in \mathcal{F}(U)$ ein $\alpha_s \in A$ mit $s \in \mathcal{F}_{\alpha_s}^{\mathrm{pr}}(U)$. Damit können wir für alle U offen in X einen Morphismus

$$\overline{\varphi}_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U),\ s \mapsto \varphi_{\alpha_s}^{\mathrm{pr}}(s)$$

definieren. Dieser ist unabhängig von den Wahlen von α_s, da die Morphismen φ_α mit den Morphismen $\mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha$ kommutieren. Wir erhalten dadurch einen Morphismus

$$\overline{\varphi} \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

von Garben und für alle $\alpha' \subset \alpha \in A$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\alpha'}^{\mathrm{pr}} \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi_{\alpha'}^{\mathrm{pr}}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_{\alpha'}^{\mathrm{pr}}"] & & \\
 & \mathcal{F} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}} \arrow[ur, "\psi_\alpha^{\mathrm{pr}}"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_\alpha^{\mathrm{pr}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Durch Garbifizierung erhalten wir dann folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi_{\alpha'}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_{\alpha'}"] & & \\
& \mathcal{F} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F}_{\alpha} \arrow[ur, "\psi_{\alpha}"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_{\alpha}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit von $\overline{\varphi}$ als Morphismus, der das obige Diagramm für alle $\alpha' \subset \alpha \in A$ kommutativ macht, folgt aus der Konstruktion. Folglich erfüllt $\mathcal{F}$ die universelle Eigenschaft des direkten Limes. □

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieser Arbeit.

Theorem 5.6. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum der Dimension n. Für alle $i > n$ und alle abelschen Garben $\mathcal{F}$ auf X gilt dann $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Beweis. Wir beweisen das Theorem in mehreren Schritten durch Induktion über die Dimension n von X.

1. Schritt. Wir zeigen, dass es genügt, den Fall zu betrachten, dass X irreduzibel ist. Ist X reduzibel, so sei Y eine irreduzible Komponente von X und es sei $U = X \setminus Y$. Nach Lemma 3.12 erhalten wir dann für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0.$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert uns, dass es genügt

$$H^i(X, \mathcal{F}_Y) = 0 = H^i(X, \mathcal{F}_U)$$

für $i > n$ zu zeigen. Ist das Theorem für irreduzible topologische Räume gezeigt, so gilt nach Lemma 4.21 $H^i(X, \mathcal{F}_Y) = H^i(Y, \mathcal{F}|_Y) = 0$. Sei nun $j\colon \overline{U} \to X$ die Inklusion. Nach Lemma 3.10 gilt dann $(j_* j^{-1}\mathcal{F}_U)_p = (j^{-1}\mathcal{F}_U)_p = (\mathcal{F}_U)_p$ für alle $p \in \overline{U}$ und $(j_* j^{-1}\mathcal{F}_U)_p = 0 = (\mathcal{F}_U)_p$ für alle $p \notin \overline{U}$, also gilt bereits $\mathcal{F}_U \cong j_* j^{-1}\mathcal{F}_U$. Da $\overline{U}$ eine irreduzible Komponente weniger als X besitzt, folgt mit Induktion über die Anzahl an irreduziblen Komponenten und Lemma 4.21

$$H^i(X, \mathcal{F}_U) = H^i(X, j_* j^{-1}\mathcal{F}_U) = H^i(\overline{U}, j^{-1}\mathcal{F}_U) = 0.$$

Also genügt es den Fall zu betrachten, dass X irreduzibel ist.

2. Schritt. Sei X irreduzibel und von der Dimension 0. Dann sind die einzigen offenen Mengen in X die leere Menge und X selbst, denn sonst gäbe es eine offene Menge $U \subsetneq X$ und $Y = X \setminus U$ besäße eine irreduzible Komponente Z. Dann wäre aber $Z \subsetneq X$ eine Kette von irreduziblen Mengen und damit $\dim(X) \geq 1$. Also ist

$$\Gamma(X, -)\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ab}}(X) \to \mathrm{Ab}$$

eine Kategorienäquivalenz. Insbesondere ist $\Gamma(X,-)$ exakt und damit folgt für alle $i>0$ und alle abelschen Garben $\mathcal{F}$ auf X schon $H^i(X,\mathcal{F})=0$.

3. Schritt. Sei X irreduzibel und von der Dimension n. Sei außerdem $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Sei A wie in Definition 5.4 und für $\alpha\in A$ seien $\mathcal{F}_\alpha$ und $\mathcal{F}_\alpha^{\mathrm{pr}}$ ebenfalls wie in Definition 5.4. Nach Lemma 5.5 gilt $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}$ und nach Proposition 5.3 genügt es also $H^i(X,\mathcal{F}_\alpha)$ für alle $\alpha\in A$ und $i>n$ zu zeigen. Ist $\alpha'\subset\alpha\in A$, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{F}_{\alpha'}^{\mathrm{pr}}\to\mathcal{F}_{\alpha}^{\mathrm{pr}}\to\mathcal{G}^{\mathrm{pr}}\to 0$$

von abelschen Prägarben, wobei $\mathcal{G}^{\mathrm{pr}}$ der Quotient ist. Durch Garbifizierung erhalten wir nach Lemma 3.3 eine exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{F}_{\alpha'}\to\mathcal{F}_{\alpha}\to\mathcal{G}\to 0$$

von abelschen Garben. $\mathcal{G}$ wird von maximal $|\alpha\setminus\alpha'|$ vielen Schnitten erzeugt. Die lange exakte Kohomologiesequenz und Induktion über $|\alpha|$ liefern uns also, dass es genügt, den Fall zu betrachten, dass $\mathcal{F}$ für eine geeignete offene Menge U von einem einzigen Schnitt $t\in\mathcal{F}(U)$ erzeugt wird. Sei nun $\underline{\mathbb{Z}}$ die zu $\mathbb{Z}$ gehörige konstante Garbe auf X, $\underline{\mathbb{Z}}_U^{\mathrm{pr}}=(i_!\underline{\mathbb{Z}})^{\mathrm{pr}}$, wobei $i\colon U\to X$ die Inklusion ist und $\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}=\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}_{\{(U,t)\}}$. Für eine offene Menge $V\subset U$ gilt $\underline{\mathbb{Z}}_U^{\mathrm{pr}}(V)=\mathbb{Z}$ und $\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}(V)=\langle t|_V\rangle$. Für $V\subset X$ offen mit $V\not\subset U$ gilt $\underline{\mathbb{Z}}_U^{\mathrm{pr}}(V)=0=\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}(V)$. Durch

$$\varphi^{\mathrm{pr}}(V)\colon\underline{\mathbb{Z}}_U^{\mathrm{pr}}(V)\to\mathcal{F}^{\mathrm{pr}}(V),\ z\mapsto zt|_V$$

wird also ein Morphismus von Prägarben definiert, der offenbar ein Epimorphismus ist. Nach Lemma 3.3 ist Garbifizierung exakt, also ist der Morphismus $\varphi\colon\underline{\mathbb{Z}}_U\to\mathcal{F}$ von Garben, den wir durch Garbifizierung erhalten, ebenfalls ein Epimorphismus. Somit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{R}\to\underline{\mathbb{Z}}_U\to\mathcal{F}\to 0,$$

wobei $\mathcal{R}=\ker(\varphi)$ ist. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert uns nun, dass es genügt $H^i(X,\mathcal{R})=0$ und $H^i(X,\underline{\mathbb{Z}}_U)=0$ für $i>n$ zu zeigen.

4. Schritt. Sei U offen und nicht leer in X und $\mathcal{R}$ eine Untergarbe von $\underline{\mathbb{Z}}_U$. Für alle $p\in U$ ist $\mathcal{R}_p$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$. Ist $\mathcal{R}=0$, so gehen wir direkt zum nächsten Schritt weiter. Andernfalls sei d die kleinste positive ganze Zahl, die in irgendeinem der Halme $\mathcal{R}_p$ vorkommt. Dann gibt es ein offenes $V\subset U$ mit $d\in\mathcal{R}(V)$ und wegen der Minimalität von d folgt für alle $W\subset V$ offen $\mathcal{R}(W)\cong d\mathbb{Z}$. Damit erhalten wir

$$\mathcal{R}|_V\cong d\underline{\mathbb{Z}}|_V\cong\underline{\mathbb{Z}}|_V \tag{$\star$}$$

und somit wiederum $\mathcal{R}_V\cong\underline{\mathbb{Z}}_V$. Wir erhalten nun eine kurze exakte Sequenz

$$0\to\underline{\mathbb{Z}}_V\to\mathcal{R}\to\mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V\to 0.$$

Sei nun $p \in X \setminus (U \setminus V)$, also $p \in X \setminus U$ oder $p \in V$. Wir betrachten zuerst den Fall $p \in X \setminus U$. Es gilt $\mathcal{R}(W) = 0$ für alle W offen in X mit $p \in W$, also gilt $\mathcal{R}_p = 0$. Im Fall $p \in V$ gilt wegen $(\star)$

$$(\mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V)_p \cong \mathcal{R}_p/(\underline{\mathbb{Z}}_V)_p \cong (\mathcal{R}|_V)_p/(\underline{\mathbb{Z}}|_V)_p = 0.$$

Also liegt der Träger von $\mathcal{R}/\underline{Z}_V$ in $U \setminus V \subset \overline{U \setminus V}$. Ist $j \colon \overline{U \setminus V} \to X$ die Inklusion, so gilt also

$$\mathcal{R}/\underline{Z}_V \cong j_*(\mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V|_{\overline{U\setminus V}}).$$

Da X irreduzibel ist, ist aber die Dimension von $\overline{U \setminus V}$ kleiner als n. Indem wir die Induktionsvoraussetzung und Lemma 4.21 verwenden, erhalten wir

$$H^i(X, \mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V) = H^i(X, j_*(\mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V|_{\overline{U\setminus V}})) = H^i(\overline{U \setminus V}, \mathcal{R}/\underline{\mathbb{Z}}_V|_{\overline{U\setminus V}}) = 0$$

für alle $i \geq n$. Nach der langen exakten Kohomologiesequenz bleibt also nur noch das Verschwinden der i-ten Kohomologie von $\underline{\mathbb{Z}}_U$ für $i > n$ zu zeigen.

5. *Schritt.* Sei U offen und nicht leer in X und $Y = X \setminus U$. Nach Lemma 3.12 haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}}_U \to \underline{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}_Y \to 0.$$

Da X irreduzibel ist, gilt $\dim(Y) < \dim(X) = n$ und wir erhalten nach der Induktionsvoraussetzung und mit Lemma 4.21

$$H^i(X, \underline{\mathbb{Z}}_Y) = H^i(Y, \underline{\mathbb{Z}}|_Y) = 0$$

für alle $i \geq n$. Da $\underline{\mathbb{Z}}$ eine konstante Garbe auf einem irreduziblen topologischen Raum ist, ist $\underline{\mathbb{Z}}$ welk und damit $H^i(X, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert nun $H^i(X, \underline{\mathbb{Z}}_U) = 0$ für alle $i > n$.

□

Literatur

[Gro57] Alexander Grothendieck. „Sur quelques points d'algèbre homologique, I". In: *Tohoku Mathematical Journal* 9.2 (1957), S. 119–221.

[GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry: Part I: Schemes. With Examples and Exercises.* Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[Mei14] Christian Meier. *Ausarbeitung zum Vortrag „Ein Verschwindungstheorem von Grothendieck" im Seminar „Kohomologie der Schemata" von Prof. Dr. Walter Gubler im Sommersemester 2014 an der Universität Regensburg.* 2014.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe.

Ort, Datum

Unterschrift