Proseminar Modultheorie

Eigenschaften von Determinanten auf freien Moduln von endlichem Rang über einem kommutativen Ring

Johannes Loher

18. Juli 2012

0 Erinnerung

Es sei R ein kommutativer Ring und V ein freier R-Modul vom Rang n.

0.1 Definition. $\mathrm{End}_R(V) := \{\varphi : V \to V | \varphi \text{ ist linear}\}$

0.2 Definition. Sei $A \in M(n \times n, R)$ mit Einträgen $a_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n$, dann heißt

$$\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} \cdot a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$$

die Determinante von A.

0.3 Definition. Sei $\varphi \in End_R(V)$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V, dann heißt $\det(\varphi) := d_\varphi \in R$ mit

$$\Delta(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) = d_\varphi \cdot \Delta(v_1, \ldots, v_n)$$

für alle Determinantenformen Δ auf V und alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Determinante von φ. Dieses d_φ existiert und ist eindeutig nach [Sla, Proposition 1.17].

0.4 Bemerkung. Für einen Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$ erhält man durch Wahl einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ eine Matrix $A \in M(n \times n, R)$ mit $\varphi(v) = A \cdot v$ für alle $v \in V$. Dabei identifizieren wir V mit R^n mit Hilfe der Basis. Es gilt dann $\det(\varphi) = \det(A)$ nach [Sla, Proposition 1.19].

1 Eigenschaften von Determinanten

Es sei R ein kommutativer Ring und V ein freier R-Modul vom Rang n. Im Folgenden werden wir die wesentlichen Eigenschaften der Determinanten von $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in R erarbeiten. Zudem werden wir Methoden entwickeln, um sie zu berechnen. Für Endomorphismen eines freien R-Moduls von endlichem Rang erhält man durch Bemerkung 0.4 entsprechende Aussagen.

1.1 Proposition. *Sei $A \in M(n \times n, R)$, dann gilt*

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Beweis: Es ist

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} \cdot a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$$

und damit ist

$$\det(A^t) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

da beim Transponieren lediglich Zeilen- und Spaltenvektoren vertauscht werden. Da $\pi \in S_n$, ist π bijektiv. Für alle $\pi \in S_n$ gilt dann:

$$\exists! \pi^{-1} \in S_n : \pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = \mathrm{id}$$

und damit folgt

$$\prod_{j=1}^{n} a_{\pi(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi(j)\pi^{-1}(\pi(j))} = \prod_{k=1}^{n} a_{k\pi^{-1}(k)}.$$

Zudem gilt

$$1 = \operatorname{sign}(\mathrm{id}) = \operatorname{sign}(\pi \circ \pi^{-1}) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \operatorname{sign}(\pi^{-1}),$$

also gilt

$$\operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$$

und damit folgt dann

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)} = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \det(A^t).$$

$\square$

1.2 Bemerkung. Aus Proposition 1.1 folgt, dass alle Eigenschaften der Determinante bzgl. der Spaltenvektoren analog für die Zeilenvektoren gelten. Insbesondere ist die Determinante auch linear und alternierend in den Zeilen, da sie linear und alternierend in den Spalten ist nach [Sla, Theorem 1.14].

1.3 Proposition. *Seien $A, B \in M(n \times n, R)$, dann gilt*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Beweis: Wir wählen eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von V und erhalten damit $\varphi_A, \varphi_B \in \operatorname{End}_R(V)$ mit $\varphi_A(v) = A \cdot v$ und $\varphi_B(v) = B \cdot v$ für alle $v \in V$ (wobei wir V mit Hilfe der Basis wieder mit R^n identifizieren). Nach Bemerkung 0.4 gilt dann $\det(\varphi_A) = \det(A)$ und $\det(\varphi_B) = \det(B)$. Zudem gilt $\det(\varphi_A \circ \varphi_B) = \det(\varphi_A) \cdot \det(\varphi_B)$ nach [Sla, Proposition 1.22]. Mit $\varphi_A \circ \varphi_B(v) = A \cdot B \cdot v$ für alle $v \in V$ und damit $\det(\varphi_A \circ \varphi_B) = \det(A \cdot B)$ folgt sofort $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. $\square$

1.4 Definition. Eine Matrix $A \in M(n \times n, R)$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $i > j$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.5 Proposition. *Wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist, dann gilt*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Beweis: Es ist

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} \cdot a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}.$$

Wenn $\pi \neq \mathrm{id}$, dann $\exists j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\pi(j) > j$. Weil A eine obere Dreiecksmatrix ist, ist dann der entsprechende Summand in $\det(A)$ gleich 0. Es bleibt also lediglich der Summand mit $\pi = \mathrm{id}$ und damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir betrachten die Determinante nun unter den Zeilenoperationen (bzw. Spaltenoperationen) des Gauß-Algorithmus. Mit diesen können wir eine Matrix auf obere Dreiecksform bringen, was uns dann die einfache Berechnung der Determinante der Matrix ermöglicht.

1.6 Proposition. *Für eine Matrix* $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in M(n \times n, R)$ *mit den Zeilen* $z_1, \ldots, z_n \in R^n$ *gilt:*

a) *Wenn wir* A' *durch Multiplikation der* j*-ten Zeile mit* $\lambda \in R$ *aus* A *erhalten für ein einziges* $j \in 1, \ldots, n$*, dann gilt*

$$\det(A') = \lambda \cdot \det(A).$$

b) *Wenn wir* A' *durch Vertauschung zweier Zeilen erhalten, dann gilt*

$$\det(A') = -\det(A).$$

c) *Wenn wir* A' *dadurch aus* A *erhalten, dass wir zur* i*-ten Zeile noch ein Vielfaches der* j*-ten Zeile addieren, wobei* $j \neq i$*, dann gilt*

$$\det(A') = \det(A).$$

Alles gilt wegen Proposition 1.1 sinngemäß für Spalten- statt Zeilenoperationen. Beachte, dass die Determinante im Allgemeinen nicht linear ist, d.h.

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Beweis: Zu a): Nach Bemerkung 1.2 ist die Determinante ist linear und alternierend in den Zeilen und damit folgt a).

Zu b): Die Vertauschung zweier Zeilen ist eine Transposition π. Zudem ist die Determinante eine n-fache alternierende Multilinearform und ist alternierend in den Zeilen. Es gilt dann $\det(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \det(z_1, \ldots, z_n)$ nach [Sla, Proposition 1.5]. Da π eine Transposition ist gilt $\operatorname{sign}(\pi) = -1$. Es gilt dann $\det(A') = -\det(A)$ und damit folgt b).

Zu c): Sei $A \in M(n \times n, R)$ mit den Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_1 \in R^n$ und sei $\lambda \in R$. Dann gilt

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i + \lambda \cdot z_j \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_j \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + 0 = \det(A)$$

wegen der Linearität der Determinanten in der i-ten Zeile. Wegen $i \neq j$ hat die Matrix des zweiten Summanden zweimal den Zeilenvektor z_j. Sie muss sie deshalb Determinante 0 haben, weil die Determinante alternierend in den Zeilen ist, und damit folgt c). $\square$

1.7 Korollar. *Sei* $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in M(n \times n, R)$ *mit den Zeilen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in R$*, dann gilt*

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Proposition 1.6, denn es ist

$$\det(\lambda \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot z_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot z_n \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \det(A).$$

□

1.8 Beispiel. Sei $A \in M(3\times 3, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ mit $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}$, dann gilt nach Proposition 1.6

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \\ &= \bar{3} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \quad | \cdot \bar{2} \\ &= \bar{3} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Mit Proposition 1.5 folgt dann

$$\det(A) = \bar{3} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{1}.$$

1.9 Proposition. *Sei $A \in M(n \times n, R)$ von der Form $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \in M(r\times r, R)$ und $A_2 = \begin{pmatrix} a_{r+1\,r+1} & \cdots & a_{r+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,r+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \in M((n-r)\times(n-r), R)$ und $B \in M(r \times (n-r), R)$, wobei a_{ij} für $1 \leq i,j \leq n$ die Einträge von A bezeichnen, dann gilt*

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

Beweis: Sei S'_n die Menge aller Permutationen $\sigma \in S_n$, unter denen $\{1, \ldots, r\}$ und damit auch $\{r+1, \ldots, n\}$ invariant sind. Für alle $\sigma \in S_n \backslash S'_n$ gilt dann

$$\sigma(\{1, \ldots, r\}) \cap \{r+1, \ldots, n\} \neq \emptyset$$

und damit

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = 0,$$

da dann mindestens einer der Faktoren 0 sein muss. Also gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S'_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Seien nun $S^1, S^2 \subseteq S_n$ Untergruppen mit $S^1 := S(\{1,\dots,r\}), S^2 := S(\{r+1,\dots,n\})$, wobei $S(\{1,\dots,r\})$ bedeutet, dass lediglich die Elemente $1,\dots,r$ permutieren, die anderen jedoch gleich gelassen werden. Offenbar ist $S'_n = S^1 \odot S^2$ (Man sagt auch S'_n ist das direkte Produkt von S^1 und S^2 und dies hat die gleiche Bedeutung, wie die direkte Summe. Man verwendet hier nur den Begriff "direktes Produkt", da ein Produkt besser die innere Verknüpfung $\circ$ von S_n darstellt). Also existiert für jedes $\sigma \in S'_n$ genau eine Darstellung $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ mit $\sigma_1 \in S^1, \sigma_2 \in S^2$, daher gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma_1 \in S^1, \sigma_2 \in S^2} \operatorname{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_1 \circ \sigma_2(i)} \\
&= \sum_{\sigma_1 \in S^1, \sigma_2 \in S^2} \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sign}(\sigma_2) \cdot \prod_{i=1}^{r} a_{i\sigma_1(i)} \cdot \prod_{i=r+1}^{n} a_{i\sigma_2(i)} \\
&= \left(\sum_{\sigma_1 \in S^1} \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdot \prod_{i=1}^{r} a_{i\sigma_1(i)} \right) \cdot \left(\sum_{\sigma_2 \in S^2} \operatorname{sign}(\sigma_2) \cdot \prod_{i=r+1}^{n} a_{i\sigma_2(i)} \right) \\
&= \det(A_1) \cdot \det(A_2).
\end{aligned}$$

□

1.10 Korollar. *Sei $A \in M(n \times n, R)$ mit Einträgen $a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ und Spaltenvektoren $v_1,\dots,v_n \in R^n$ und $v_i = 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt*

$$\det(A) = 0.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $i = 1$, dann gilt

$$\det(A) = \det(0, v_2, \dots, v_n) = \det(0) \cdot \det(v'_2, \dots, v'_n) = 0$$

nach Proposition 1.9, wobei $v'_i := \begin{pmatrix} a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in R^{n-1}$ für $1 \leq i \leq n$. (Die Behauptung folgt auch direkt aus der Definition der Determinante.) □

1.11 Beispiel. Gegeben seien $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in R$. Wir wollen die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

zeigen. Man nennt diese Determinante auch **Vandermonde-Determinante**.

Beweis: Wir beweisen dies per Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 1$ folgt sofort, da das Produkt über die leere Indexmenge per Konvention als 1 erklärt wird.

Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$: Nach Proposition 1.6 lassen folgende Zeilenoperationen die Vandermonde-Determinante unverändert:

n-te Zeile$-\lambda_1 \cdot (n-1)$-te Zeile, $(n-1)$-te Zeile$-\lambda_1 \cdot (n-2)$-te Zeile, $\dots$, 2. Zeile$-\lambda_1 \cdot$1. Zeile.

Also gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-2}\cdot(\lambda_2-\lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}\cdot(\lambda_n-\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot\det\begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2}\cdot(\lambda_2-\lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}\cdot(\lambda_n-\lambda_1) \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Dies zeigt den Induktionsschritt und mit vollständiger Induktion folgt dann die Behauptung. □

2 Adjungierte Matrix

Wir werden in diesem Abschnitt einen Zusammenhang zwischen einer $n\times n$-Matrix mit den Determinanten ihrer $(n-1)\times(n-1)$-Teilmatrizen herstellen. In diesem Zusammenhang werden wir die adjungierte Matrix einführen, die zur Berechnung des Inversen einer Matrix und zur Lösung von inhomogenen Gleichungssystemen verwendet werden kann.

Wie immer bezeichne R einen kommutativen Ring. Weiter sei $A \in M(n\times n, R)$ mit den Einträgen $a_{kl}\in R, 1\le k,l\le n$.

2.1 Definition. Für $1\le i,j\le n$ definieren wir $A_{ij}\in M(n\times n,R)$ durch:

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & 0 & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & 0 & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

und $A'_{ij}\in M((n-1)\times(n-1),R)$ durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A:

$$A'_{ij} := \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

2.2 Lemma. *Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten der Matrix A, dann gilt*

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij}) = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Beweis: Durch $i-1$ Zeilenvertauschungen und $j-1$ Spaltenvertauschungen erhalten wir

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

nach Proposition 1.6 b). Mit Hilfe von Proposition 1.9 folgt die erste Behauptung. Für $k \neq j$ subtrahiert man von der k-ten Spalte der Matrix $(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$ das a_{ik}-fache der j-ten Spalte ($= e_i$) und erhält die Matrix A_{ij}. Nach Proposition 1.6 c) ändert sich dabei die Determinante nicht, d.h.

$$\det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n) = \det(A_{ij}).$$

□

2.3 Definition. Wir nennen $\det(A_{ij})$ den **Cofaktor** zu (ij) und

$$A^{ad} := (\det(A_{ji}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n \times n, R)$$

heißt die zu A **adjungierte Matrix**. Man beachte, dass sie transponiert ist zur Matrix der Cofaktoren, da $i \leftrightarrow j$.

2.4 Theorem. *Es gilt*

$$A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = \det(A) \cdot E_n.$$

Beweis: Seien $a_1, \dots, a_n$ wieder die Spalten der Matrix A. Wir berechnen den (ik)-ten Eintrag von $A^{ad} \cdot A$:

$$\begin{aligned}(A^{ad} \cdot A)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \det(A_{ji}) \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n)\end{aligned}$$

Wenn $i = k$, dann ist das gleich $\det(A)$. Falls $i \neq k$, dann ist dies gleich 0, da die Determinante nach Bemekung 1.2 alternierend in den Spalten ist. Dies zeigt $A^{ad} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$. Benutzt man dies für A^t statt A und die triviale Gleichung $(A^t)^{ad} = (A^{ad})^t$ erhalten wir:

$$(A^{ad})^t \cdot A^t = \det(A^t) \cdot E_n.$$

Für Matrizen $B, C \in M(n \times n, R)$ gilt $(B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t$ nach [Rei, Proposition 2.1b]. Damit folgt

$$(A \cdot A^{ad})^t = \det(A^t) \cdot E_n = \det(A) \cdot E_n.$$

Erneutes Transponieren liefert $A \cdot A^{ad} = \det(A) \cdot E_n$. Dies zeigt die Behauptung. □

2.5 Korollar. *Man hat folgende Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}).$$

Damit lässt sich die Determinante der $n \times n$ Matrix A aus den Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen A'_{ij} berechnen.

Beweis: Die erste Behauptung ist die Auswertung von Theorem 2.4 im Eintrag (jj) und die zweite Behauptung ergibt sich aus Lemma 2.2. □

2.6 Definition. Sei S ein Ring (nicht notwendigerweise kommutativ), dann definiert

$$S^* := \{x \in S | \exists y \in S : x \cdot y = 1 = y \cdot x\}$$

die Menge aller bezüglich der Multiplikation (links und rechts) invertierbaren Elemente aus S. Seien $x, y, y' \in S$ mit $y \cdot x = 1 = x \cdot y$ und $y' \cdot x = 1 = x \cdot y'$, dann gilt

$$y' = y' \cdot 1 = y' \cdot (x \cdot y) = (y' \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y.$$

Für $x \in S^*$ ist das inverse Element somit eindeutig bestimmt und wird mit x^{-1} bezeichnet. Man nennt die Elemente aus S^* auch **Einheiten** und S^* wird auch **Einheitengruppe** des Ringes S genannt.

2.7 Definition. Sei S ein Ring (nicht notwendigerweise kommutativ). Für eine Matrix $A \in M(n \times n, S)$ gilt: A heißt invertierbar genau dann, wenn $A \in GL(n \times n, S) := M(n \times n, S)^*$. Die zu A inverse Matrix wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt dann

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n.$$

2.8 Korollar. *Für eine Matrix $A \in (n \times n, R)$ gilt $A \in GL(n \times n, R)$ genau dann, wenn* $\det(A) \in R^*$*. In diesem Fall gilt*

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^{ad}.$$

Beweis: Sei $A \in GL(n \times n, R)$, dann gilt

$$1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^{-1}) \underset{\text{Proposition 1.3}}{=} \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A),$$

also ist $\det(A) \in R^*$ und es gilt

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

Nach Theorem 2.4 haben wir

$$A \cdot A^{ad} = A^{ad} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$$

und somit

$$A \cdot (\det(A)^{-1} \cdot A^{ad}) = (\det(A)^{-1} \cdot A^{ad}) \cdot A = \det(A)^{-1} \cdot \det(A) \cdot E_n = E_n,$$

also gilt

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^{ad}.$$

Wir zeigen nun die Rückrichtung, sei also $\det(A) \in R^*$. Nach obiger Rechnung ist dann $\det(A)^{-1} \cdot A^{ad}$ invers zu A, also ist $A \in GL(n \times n, R)$ und es gilt $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^{ad}$. □

2.9 Beispiel. Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Dann ist $\det(A'_{11}) = 5, \det(A'_{12}) = 2, \det(A'_{21}) = 2, \det(A'_{22}) = 1$ und damit mit den Vorfaktoren $(-1)^{i+j}$ und Transponieren: $A^{ad} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $\det(A) = 1$, also gilt nach Korollar 2.8

$$A^{-1} = A^{ad} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.10 Korollar (Cramersche Regel)**.** *Sei $A \in GL(n \times n, R)$ und $b \in R^n$. Dann hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau eine Lösung $v \in R^n$ und es gilt*

$$v_i = (\det(A))^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

wobei a_j den j-ten Spaltenvektor von A beschreibt für $j = 1, \dots, n$.

Beweis: Es gilt:

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b,$$

also ist $v = A^{-1} \cdot b$ die eindeutig bestimmte Lösung von $A \cdot x = b$. Nach Korollar 2.8 ist der (ij)-te Eintrag von A^{-1} gleich

$$\det(A)^{-1} \cdot \det(A_{ji}) \underset{\text{Lemma 2.2}}{=} \det(A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} v_i &= (A^{-1} \cdot b)_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det(A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \cdot b_j \\ &= \det(A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung. □

2.11 Beispiel. Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ mit $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix}$ und $b \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ mit $b = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$. Wir betrachten nun das Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Zunächst berechnen wir

$\det(A)$ um herauszufinden, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \bar{2} \quad \mid \cdot \bar{4} \\ \quad + \\ \quad\quad + \end{array} \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\
&= \bar{5}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1},$$

also gilt $\det(A) \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^*$ und mit Korolloar 2.8 folgt $A \in GL(3 \times 3, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$. Nach Korollar 2.10 hat das Gleichungssystem dann genau eine Lösung $v \in (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$, für die gilt

$$v_1 = \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix}, v_2 = \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}, v_3 = \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \bar{2} \quad \mid \cdot \bar{4} \\ \quad + \\ \quad\quad + \end{array} \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} \end{pmatrix} \\
&= \bar{3} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \bar{5} \\ \quad + \end{array} \\
&= \bar{3} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \\
&= \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \bar{2} \quad \mid \cdot \bar{4} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
&= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \quad \text{(Wir ziehen die } \bar{5} \text{ in die 2. Zeile hinein)} \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \\
&= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \bar{4} \\ \leftarrow + \end{array} \\
&= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\
&= \bar{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \bar{2} \quad \mid \cdot \bar{4} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
&= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \end{array} \\
&= \bar{5} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{5} \end{pmatrix} \\
&= \bar{5} \cdot \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{5}
\end{aligned}
$$

Also gilt $v = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{5} \\ \bar{5} \end{pmatrix}$.

3 Weitere Eigenschaften von Determinanten

In diesem Abschnitt werden wir weitere Eigenschaften von Determinanten erarbeiten. Es sei im Folgenden R wieder ein kommutativer Ring und V ein freier R-Modul vom Rang n.

3.1 Proposition. *Sei $f \in \operatorname{End}_R(V)$ so, dass $\det(f)$ kein Nullteiler in R ist. Dann ist f injektiv.*

Beweis: Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Sei $A \in M(n \times n, R)$ die Matrix von f bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_n$. Es sei zudem $x = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j \in \ker(f)$, wobei a_j die Koordinaten von

x bezüglich der Basis $b_1, \ldots, b_n$ sind. Es gilt dann

$$\begin{aligned} a_i \cdot \det(f) &= a_i \cdot \det(A) = a_i \cdot \det(f(b_1), \ldots, f(b_n)) \\ &= \det(f(b_1), \ldots, a_i \cdot f(b_i), \ldots, f(b_n)) \\ &= \det(f(b_1), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot f(b_j), \ldots, f(b_n)) \\ &= \det(f(b_1), \ldots, f(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j), \ldots, f(b_n)) \\ &= \det(f(b_1), \ldots, f(x), \ldots, f(b_n)) \\ &= \det(f(b_1), \ldots, 0, \ldots, f(b_n)) = 0 \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ nach Korollar 1.10 . Weil $\det(f)$ ein Nichtnullteiler ist, folgt $a_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und damit folgt $x = 0$. Also ist $\ker(f) = \{0\}$ und damit ist f injektiv. (Die Behauptung lässt sich auch sofort mit Theorem 2.4 zeigen.) $\square$

3.2 Bemerkung. Man kann für Proposition 3.1 mit Hilfe der dualen Abbildung f^* sogar Äquivalenz zeigen. Da wir die duale Abbildung bisher jedoch nur sehr wenig behandelt haben, sei hier lediglich auf den Beweis in [SS94, Satz 49.2] verwiesen.

Literatur

[Gub] W. Gubler: *Vorlesungsskript: Lineare Algebra I.* 2011.

[SS94] G. Scheja und U. Storch: *Lehrbuch der Algebra. Teil 1.* B.G. Teubner, 1994.

[Rei] R. Reichardt: *Lineare Abbildungen und Matrizen von R-Rechtsmoduln, Unterschied zu R-Linksmoduln.* 2012.

[Sla] I. Slavinskaya: *Determinantenformen auf freien Moduln von endlichem Rang über einem kommutativen Ring.* 2012.