Das Banach-Tarski-Paradoxon

Johannes Loher

10. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Definition. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Dann operiert G auf X, wenn es für alle $g \in G$ eine Abbildung (ebenfalls mit g bezeichnet) $g : X \to X,\ x \mapsto gx \in X$ gibt, sodass für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ $g(hx) = gh(x)$ und $idx = x$ gilt.

Die Funktionen aus Definition 1.1 sind Bijektionen, da $g^{-1} : X \to X,\ x \mapsto g^{-1}x$ eine Umkehrfunktion zu g ist.

1.2 Definition. Sei X eine Menge und sei G eine Gruppe, die auf einer Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}(X)$ operiert. Dann heißt eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ G-invariant, wenn für alle $g \in G, E \in \mathcal{A}$ $\mu(E) = \mu(gE)$ gilt.

1.3 (Maßproblem)**.** Gibt es eine Funktion $\mu_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

a) μ ist σ-additiv, das heißt für eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ für alle $n \in N$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

b) μ ist G(n)-invariant.

c) $\mu([0, 1)^n) = 1$

1.4 (Inhaltsproblem)**.** Gibt es eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

a) μ ist additiv, das heißt für alle $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

b) μ ist G(n)-invariant.

c) $\mu([0, 1)^n) = 1$

1.5 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Dann heißt eine Teilmenge E von X G-paradox, wenn es für gewisse $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ paarweise disjunkte Teilmengen

$$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset E$$

und

$$g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$$

gibt, sodass

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j).$$

Dabei können die Mengen A_i und B_j auch so gewählt werden, dass $\{g_i A_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ und $\{h_j B_j \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$ jeweils Mengen paarweise disjunkter Mengen sind. Man wählt dazu einfach entsprechend kleinere Mengen A_i und B_j.

Ist $E = X = G$ und handelt es sich bei der Gruppenoperation um Linkstranslation, so nennt man G paradox.

1.6 Definition. Die freie Gruppe F über einer erzeugenden Menge M ist die Menge aller endlichen Wörter, die aus Elementen aus $\{\sigma, \sigma^{-1} \mid \sigma \in M\}$ gebildet werden können. Zwei Wörter sind äquivalent, wenn sie durch Entfernen oder Hinzufügen der Kombinationen $\sigma\sigma^{-1}$ und $\sigma^{-1}\sigma$ ineinander übergeführt werden können. Wenn ein Wort keine solchen Kombinationen enthält, wird es reduziertes Wort genannt. Der Einfachheit halber (um die Verwendung von Äquivalenzklassen zu vermeiden) soll F nur aus reduzierten Wörtern bestehen. Die Gruppenoperation ist dann Aneinanderhängen und Reduzieren. Die Identität aus F ist das leere Wort. Man kann zeigen, dass für zwei Mengen M, N, die die Gruppe F frei erzeugen, $|M| = |N|$ gilt. Der Rang von F ist dann definiert als $|M|$.

1.7 Theorem. *Sei F eine freie Gruppe vom Rang 2. Dann ist F paradox.*

Beweis. Seien σ, τ freie Erzeuger von F. Für $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$ sei $W(\rho)$ die Menge der Elemente aus F, die (als Wort aus $\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$ betrachtet) links mit ρ beginnen. Dann ist $F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ und diese Teilmengen von F sind paarweise disjunkt. Sei nun $h \in F \setminus W(\sigma)$. Dann ist $\sigma^{-1}h \in W(\sigma^{-1})$ und damit $h = \sigma(\sigma^{-1}h) \in \sigma W(\sigma^{-1})$. Also erhält man $F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$ und analog $F = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$. □

1.8 Definition. Die freie Halbgruppe S über einer erzeugenden Menge M ist die Menge aller endlichen Wörter, die aus Elementen aus M gebildet werden können. Die Halbgruppenoperation ist Aneinanderhängen und die Identität in S ist das leere Wort. Man kann wieder zeigen, dass für zwei Mengen M, N, die die Halbgruppe S frei erzeugen, $|M| = |N|$ gilt und man definiert dann den Rang von S als $|M|$.

1.9 Bemerkung. Analog zu Definition 1.1 kann auch eine Halbgruppe S auf einer Menge X operieren, die entsprechenden Abbildungen sind dann aber nicht notwendigerweise bijektiv.

1.10 Proposition. *Jede Gruppe G, die eine freie Halbuntergruppe von Rang 2 hat, enthält eine nichtleere, G-paradoxe Teilmenge.*

Beweis. Sei S eine freie Halbgruppe mit den freien Erzeugern τ und ρ. Seien außerdem $A = \tau S$ und $B = \rho S$. Ist nun S Teilmenge einer Gruppe G, so ist S G-paradox, da ja $S = \tau^{-1}A = \rho^{-1}B$. □

1.11 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und sei $E \subset X$. Dann heißt E abzählbar G-paradox, wenn

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n B_n$$

gilt, wobei $\{A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von E ist und $g_n, h_n \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.12 Theorem. *S^1 ist abzählbar $\mathrm{SO}(2)$-paradox. Sei G die Gruppe der Translationen modulo 1 auf $[0,1)$. Dann ist $[0,1)$ abzählbar G-paradox.*

Beweis. Zwei Punkte $p, q \in S^1$ seien äquivalent, wenn der eine aus dem anderen durch eine Rotation um den Ursprung mit einem rationalen Vielfachen von 2π hervorgeht (man sieht leicht ein, dass dies eine Äquivalenzrelation ist). Sei nun M ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Da die rationalen Zahlen abzählbar sind, können wir die obigen Rotationen durchnummerieren und erhalten $\{\rho_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Menge all dieser Rotationen. Sei nun $M_n = \rho_n M$. Dann ist $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine paarweise disjunkte Zerlegung von S^1. Für zwei beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es eine Drehung $\rho_{n,m}$, sodass $M_n = \rho_{n,m} M_m$. Also können wir $\{M_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ durch entsprechende Rotationen in $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ überführen. Analog gibt es Drehungen, um $\{M_{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu überführen und damit ist S^1 $\mathrm{SO}(2)$-paradox.

Die Bijektion $S^1 \to [0,1),\ (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \frac{\theta}{2\pi}$ induziert einen Isomorphismus $\mathrm{SO}(2) \to G$ und damit erhalten wir auch den 2. Teil der Behauptung. □

1.13 Korollar.

a) Es gibt kein σ-additives, rotationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(S^1) \to [0, \infty]$ mit $\mu(S^1) = 1$.

b) Es gibt eine nicht Lebesgue-messbare Teilmenge von $[0,1)$.

c) Es gibt kein σ-additives, translationsinvariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit $\mu([0,1)^n) = 1$.

Beweis.

a) Wir nehmen an, μ wäre solch ein Maß. Weiter sei $A = \bigcup\{M_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \bigcup\{M_{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei die M_n wie im Beweis von Theorem 1.12 definiert sind. Seien auch die $\rho_{n,m}$ wie im Beweis von Theorem 1.12definiert. Dann ist $\{A, B\}$ eine disjunkte Zerlegung von S^1 und damit folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(S^1) = \mu(A) + \mu(B) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(M_{2n}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(M_{2n+1}) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\rho_{n,2n}(M_{2n})) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\rho_{n,2n+1}(M_{2n+1})) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_{n,2n}(M_{2n})\right) + \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_{n,2n+1}(M_{2n+1})\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) \\ &= \mu(S^1) + \mu(S^1) = 2, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt.

b) Dies folgt aus c). Ein Beispiel für eine solche Menge ist

$$\{\alpha \in [0,1) \mid (\cos\alpha, \sin\alpha) \in M\},$$

wobei M wie im Beweis von Theorem 1.12 definiert ist.

c) Auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ kann es kein solches Maß geben, da seine Einschränkung auf $\mathcal{P}([0,1))$ invariant unter Translationen modulo 1 wäre, im Widerspruch zu Theorem 1.12. Solch ein Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ induziert aber bereits ein ein Maß ν auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, das ebenfalls dieser Gestalt ist, nämlich durch $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty],\ A \mapsto \mu(A \times [0,1)^{n-1})$.

□

1.14 Bemerkung. Theorem 1.12 und Korollar 1.13 zeigen, dass das Maßproblem nicht lösbar ist.

1.15 Theorem. G(2) *enthält zwei Isometrien τ, ρ, die eine freie Halbuntergruppe S von* G(2) *frei erzeugen.*

Beweis. Zur Vereinfachung identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Wir wählen $\theta \in \mathbb{R}$ so, dass $u = e^{i\theta}$ transzendent ist (da der Einheitskreis nur abzählbar viele über $\mathbb{Q}$ algebraische Zahlen enthält, gibt es solch ein θ). Sei nun $\tau(z) = z + 1$ und $\rho(z) = uz$. Sei S die von τ und ρ frei erzeugte Halbgruppe. Sei außerdem ι der kanonische Homomorphismus von S nach G(2). Wenn klar ist, was gemeint ist, bezeichnen wir das Bild von $w \in S$ ebenfalls mit w. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass ι injektiv ist.

Wir zeigen zunächst, dass für je zwei Wörter $w_1 \in \tau S, w_2 \in \rho S$ gilt:

$$w_1(0) \neq w_2(0)$$

Seien dazu

$$w_1 = \tau^{j_1}\rho^{j_2}\cdots\tau^{j_m},\ w_2 = \rho^{k_1}\tau^{k_2}\cdots\tau^{k_\ell}$$

mit $m, \ell \geq 1$ und $j_1, \dots, j_m, k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (da $\rho(0) = 0$ können wir annehmen, dass w_1, w_2 beide mit einer Potenz von τ enden, wenn $w_2 \neq \rho^{k_1}$). Dann ist

$$w_1(0) = j_1 + j_3 u^{j_2} + j_5 u^{j_2+j_4} + \cdots + j_m u^{j_2+j_4+\cdots+j_{m-1}}$$

und

$$w_2(0) = k_2 u^{k_1} + k_4 u^{k_1+k_3} + \cdots + k_\ell u^{k_1+k_3+\cdots+k_{\ell-1}} (= 0, \text{ falls } w_2 = \rho^{k_1}).$$

Wenn nun $w_1(0) = w_2(0)$ gilt, so erhält man durch die Subtraktion $w_1(0) - w_2(0)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$, das u als Nullstelle hat, im Widerspruch zur Transzendenz von u.

Seien $w_1, w_2 \in S$ zwei unterschiedliche Wörter mit $\iota(w_1) = \iota(w_2)$. Durch Wegstreichen gleicher Silben auf der linken Seite von w_1 und w_2 erhalten wir dann zwei Wörter $w_1', w_2' \in S$ mit $\iota(w_1') = \iota(w_2')$, die links unterschiedlich beginnen, oder von denen eines das leere Wort ist, und das andere nicht. Im ersten Fall erhalten wir sofort einen Widerspruch. Für den zweiten Fall sei ohne Einschränkung w_1' das leere Wort und w_2' beginne links mit τ. Dann gilt aber $w_2'\rho(0) = \rho(0)$, was ebenfalls einen Widerspruch darstellt. □

1.16 Proposition. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Seien $\tau, \rho \in G$ und sei S die von τ, ρ frei erzeugte Halbgruppe. Gibt es ein $x \in X$, sodass für alle $w_1 \in \tau S, w_2 \in \rho S$ stets $w_1(x) \neq w_2(x)$ gilt, dann gibt es eine nichtleere, G-paradoxe Teilmenge von X.*

Beweis. Sei $x \in X$ mit dieser Eigenschaft. Sei E die S-Bahn von x. Dann gilt $\tau(E), \rho(E) \subset E$ und $\tau v_1(x) \neq \rho v_2(x)$ für beliebige Wörter $v_1, v_2 \in S$ wegen der Wahl von x. Also gilt $\tau(E) \cap \rho(E) = \emptyset$. Weil dann auch $\tau^{-1}(\tau(E)) = E = \rho^{-1}(\rho(E))$ gilt, ist E G-paradox. □

1.17 Theorem (Sierpiński-Mazurkiewicz-Paradoxon)**.** *Es gibt eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die* G(2)*-paradox ist.*

Beweis. Sei S die freie Halbgruppe aus dem Beweis von Theorem 1.15. Dann zeigen der Beweis von Theorem 1.15 und Proposition 1.16, dass die S-Bahn von 0 G(2)-paradox ist. □

1.18 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Dann heißt $x \in X$ nicht-trivialer Fixpunkt, wenn es ein $g \in G$ mit $g \neq \mathrm{id}$ gibt, sodass $gx = x$. Enthält X keinen nicht-trivialen Fixpunkt, so sagt man G operiert fixpunktfrei auf X.

1.19 Proposition. *Sei G eine paradoxe Gruppe, die fixpunktfrei auf einer Menge X operiert. Dann ist X G-paradox. Insbesondere ist X F-paradox, wenn eine freie Gruppe F vom Rang* 2 *fixpunktfrei auf X operiert.*

Beweis. Seien $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ paarweise disjunkte Teilmengen von G und $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$, sodass

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)$$

gilt. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge M, die genau ein Element aus jeder G-Bahn von X enthält. Dann ist $\{g(M) \mid g \in G\}$ eine paarweise disjunkte Zerlegung von X, da G fixpunktfrei auf X operiert. Seien nun $A_i^* = \bigcup\{g(M) \mid g \in A_i\}$ und $B_j^* = \bigcup\{g(M) \mid g \in B_j\}$. Dann sind $A_1^*, \dots, A_n^*, B_1^*, \dots, B_m^*$ paarweise disjunkte Teilmengen von X, da $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ paarweise disjunkt sind. Nun erhält man

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i^*) &= \bigcup_{i=1}^{n} g_i \bigcup\{g(M) \mid g \in A_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup\{g_i(g(M)) \mid g \in A_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup\{g(M) \mid g \in g_i(A_i)\} \\ &= \bigcup\{g(M) \mid g \in G\} \\ &= X\end{aligned}$$

und analog

$$\bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j^*) = X.$$

Also ist X G-paradox. Die Behauptung über F folgt dann aus Theorem 1.7. $\square$

1.20 Korollar. *Eine Gruppe mit einer paradoxen Untergruppe ist paradox.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 1.19. $\square$

2 Das Hausdorff-Paradoxon

2.1 Theorem. $\mathrm{SO}(3)$ *und damit auch* $\mathrm{SO}(n), n \geq 3$ *hat eine freie Untergruppe vom Rang* 2.

Beweis. Seien ϕ, ρ die Drehungen gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse und die x-Achse mit dem Winkel $\arccos \frac{1}{3}$. Dann haben $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ folgende Matrixdarstellungen:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Sei G die von ϕ und ρ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SO}(3)$. Um zu beweisen, dass die von diesen beiden Drehungen erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SO}(3)$ frei ist, zeigen wir, dass kein nicht-triviales reduziertes Wort in $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ der Identität in G entspricht. Wir können uns hierbei auf Wörter beschränken, die rechts mit $\phi^{\pm 1}$ enden, da die Konjugation mit $\phi^{\pm 1}$ nicht beeinflusst, ob ein Wort der Identität entspricht. Sei nun also w solch ein Wort.

Wir behaupten, dass

$$w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}$$

gilt, mit $a, b, c \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $3 \nmid b$. Daraus folgt $w(1,0,0) \neq (1,0,0)$ und damit $w \neq \mathrm{id} \in G$. Wir beweisen diese Behauptung durch Induktion über die Länge n von w:

Induktionsanfang ($n = 1$):
Es gilt $w = \phi^{\pm 1}$ und dann folgt

$$w(1,0,0) = \frac{(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)}{3}.$$

Weiterhin gilt $3 \nmid b = \pm 2$.

Induktionsschritt $(n-1 \to n)$**:**
Sei nun $w = \phi^{\pm 1} w'$ oder $w = \rho^{\pm 1} w'$, wobei

$$w'(1,0,0) = \frac{(a', b'\sqrt{2}, c')}{3^{n-1}}$$

gelte, für gewisse $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ mit $3 \nmid b'$ (nach Induktionsvoraussetzung). Wenden wir nun $w = \phi^{\pm 1} w'$ auf $(1,0,0)$ an, so erhalten wir:

$$w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^n} \text{ mit } a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'.$$

Wenden wir $w = \rho^{\pm 1} w'$ auf $(1,0,0)$ an, so erhalten wir:

$$w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^n} \text{ mit } a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'.$$

Aus $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ folgt $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wir müssen also nur noch zeigen, dass $3 \nmid b$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $3 \nmid b'$. Nun treten vier Fälle auf: w kann von der Form

$$\phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1} v, \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1} v, \phi^{\pm 1}\phi^{\pm 1} v, \text{ oder } \rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1} v$$

sein, mit

$$v(1,0,0) = \frac{(a'', b''\sqrt{2}, c'')}{3^{n-2}}, \; a'', b'', c'' \in \mathbb{Z}.$$

Im ersten Fall erhalten wir dann $3 \mid a' = 3a''$ und damit $3 \nmid b = b' \pm 2a'$, da $3 \nmid b'$ nach Induktionsvoraussetzung.

Im zweiten Fall erhalten wir $3 \mid c' = 3c''$ und damit $3 \nmid b = b' \pm 2c'$, da $3 \nmid b'$ nach Induktionsvoraussetzung.

Im dritten Fall ergibt sich $a' = a'' \mp 4b''$ und $b' = b'' \pm 2a''$. Dann gilt

$$b = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' \pm 2a'' - 8b'' = b' + \underbrace{b'' \pm 2a''}_{=b'} - 9b'' = 2b' - 9b''$$

und mit $3 \nmid b'$ (nach Induktionsvoraussetzung) folgt $3 \nmid b$.

Im vierten Fall erhalten wir $b' = b'' \mp 2c''$ und $c' = c'' \pm 4b''$. Es folgt

$$b = b' \mp 2(c'' \pm 4b'') = b' \mp 2c'' - 8b'' = b' + \underbrace{b'' \mp 2c''}_{=b'} - 9b' = 2b' - 9b'$$

und mit $3 \nmid b'$ (nach Induktionsvoraussetzung) folgt wieder $3 \nmid b$.

Aus $3 \mid 0$ folgt $b \neq 0$, also gilt $w \neq \mathrm{id} \in G$ für alle nicht-trivialen Wörter w. Demnach ist G frei und ϕ, ρ sind freie Erzeuger von G und damit hat G den Rang 2. □

2.2 Theorem (Hausdorff-Paradoxon)**.** *Es gibt eine abzählbare Teilmenge D von S^2, sodass $S^2 \setminus D$ $\mathrm{SO}(3)$-paradox ist.*

Beweis. Sei G die freie Untergruppe von $\mathrm{SO}(3)$ vom Rang 2 aus Theorem 2.1. Für jedes $\rho \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ gibt es genau 2 Punkte $p_\rho, q_\rho \in S^2$, mit $\rho(p_\rho) = p_\rho$ und $\rho(q_\rho) = q_\rho$. Sei nun $D = \{p_\rho, q_\rho \mid \rho \in G\}$. Da G abzählbar ist, ist auch D abzählbar. Offenbar operiert G nun fixpunktfrei auf $S^2 \setminus D$, also ist $S^2 \setminus D$ G-paradox nach Theorem 1.19 und damit natürlich auch $\mathrm{SO}(3)$-paradox. □

2.3 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und sei E eine Teilmenge von X. Dann heißt E G-vernachlässigbar, wenn $\mu(E) = 0$ gilt, für alle additiven, G-invarianten Maße $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(E) < \infty$.

2.4 Proposition. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und sei $E \subset X$ G-paradox. Dann ist E G-vernachlässigbar.*

Beweis. Sei μ ein additives, G-invariantes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ mit $\mu(E) < \infty$. Wir wählen nun $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subset E$ paarweise disjunkt, $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sodass

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)$$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu(g_i A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(h_i B_j) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j\right) \\
&= \mu(E) + \mu(E) \\
&= 2\mu(E)
\end{aligned}$$

und wegen $\mu(E) < \infty$ gilt dann $\mu(E) = 0$. □

2.5 Theorem. *S^2 ist $\mathrm{SO}(3)$-vernachlässigbar. Also gibt es kein additives, $\mathrm{SO}(3)$-invariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(S^2) \to [0, \infty]$ mit $\mu(S^2) = 1$. Weiterhin gibt es für alle $n \geq 3$ kein additives, $\mathrm{G}(n)$-invariantes Maß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit $\mu([0, 1)^n) = 1$.*

Beweis. Sei μ eine additives, $\mathrm{SO}(3)$-invariantes Maß auf $\mathcal{P}(S^2)$ mit $\mu(S^2) < \infty$. Sei D die abzählbare Menge aus Theorem 2.2. Nach Proposition 2.4 gilt dann $\mu(S^2 \setminus D) = 0$, also genügt es zu zeigen, dass $\mu(D) = 0$. Sei ℓ eine Gerade durch den Ursprung, die disjunkt zu D ist. Sei ρ_θ die Drehung um ℓ mit dem Winkel θ. Zu jedem $p \in D$ sei dann $A(p) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \rho_\theta(p) \in D, \rho_\theta(p) \neq p\}$. Da D abzählbar ist, ist auch $A(p)$ abzählbar für alle $p \in D$ und damit ist auch $A = \bigcup\{A(p) \mid p \in D\}$ abzählbar. Wenn ρ eine der überabzählbar vielen Drehungen ist, die nicht in A sind, so ist $\rho(D)$ disjunkt zu D. Dann gilt

$$\mu(S^2) \geq \mu(D \cup \rho(D)) = \mu(D) + \mu(\rho(D)) = \mu(D) + \mu(D)$$

und damit $\mu(D) \leq \frac{\mu(S^2)}{2}$.

Das gleiche Argument kann man auch für die abzählbare Menge $D \cup \rho(D)$ verwenden, um eine Drehung ρ' zu erhalten, sodass $\rho'(D \cup \rho(D)), D \cup \rho(D)$ disjunkt sind. Also gilt

$$\mu(S^2) \geq \mu(D \cup \rho(D)) + \mu(\rho'(D \cup \rho(D))) = 4\mu(D)$$

und damit $\mu(D) \leq \frac{\mu(S^2)}{4}$. Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man $\mu(D) \leq \frac{\mu(S^2)}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mu(D) = 0$.

Um die Behauptung über $\mathbb{R}^n$ zu zeigen, genügt es den Fall $n = 3$ zu betrachten, da ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), n > 3$ eines in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ induziert, wie im Beweis von Korollar 1.13 beschrieben. Sei nun μ ein $G(3)$-invariantes, additives Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu([0,1)^n) = 1$. Dann muss μ auf einelementigen Mengen verschwinden, da alle einelementigen Mengen jeweils durch Translationen ineinander übergeführt werden können und damit das gleiche Maß haben. Wäre also das Maß einer einelementigen Menge positiv, so würde $\mu([0,1)^n) = \infty$ gelten. Aus der $G(3)$-Invarianz von μ (beziehungsweise der daraus resultierenden $T(3)$-Invarianz) folgt $0 < \mu(J) < \infty$ für jeden Würfel $J \subset \mathbb{R}^3$. Daraus ergibt sich $0 < \mu(B) < \infty$, wobei B den Einheitsball in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Dann ist $\nu : \mathcal{P}(S^2) \to [0,\infty],\ A \mapsto \mu(\{\alpha p \mid p \in A,\ 0 < \alpha \leq 1\})$ ein additives, SO(3)-invariantes Maß. Da $\mu(\{0\}) = 0$ gilt, folgt $\nu(S^2) = \mu(B) > 0$ im Widerspruch zur SO(3)-Vernachlässigbarkeit von S^2.

□

3 Das Banach-Tarski-Paradoxon

3.1 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien A, B zwei Teilmengen von X. Dann heißen A und B G-kongruent, wenn es ein Element $g \in G$ gibt, sodass $gA = B$ gilt.

3.2 Definition. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und seien A, B zwei Teilmengen von X. Dann heißen A und B G-äquizerlegbar, wenn A und B in eine gleiche Anzahl disjunkter Teilmengen zerlegt werden können, die jeweils G-kongruent zueinander sind, also wenn es $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ A_1, \ldots, A_n \subset A,\ B_1, \ldots, B_n \subset B,\ g_1, \ldots, g_n \in G$ gibt mit

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

$A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$, $g_i A_i = B_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Sind zwei Mengen $A, B \subset X$ G-äquizerlegbar, so schreiben wir $A \sim_G B$. Im Fall, dass X ein metrischer Raum und G die komplette Isometriegruppe von X ist, so lassen wir das G weg.

Man sieht leicht ein, dass $\sim_G$ eine Äquivalenzrelation ist.

Damit erhalten wir auch eine neue Notation dafür, dass eine Teilmenge E einer Menge X, auf der eine Gruppe G operiert, G-paradox ist: E ist genau dann G-paradox, wenn es disjunkte Teilmengen A, B von E gibt, mit

$$A \sim_G E \sim_G B.$$

3.3 Proposition. *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien $E, E' \subset X$ G-äquizerlegbar. Wenn E G-paradox ist, so ist auch E' G-paradox.*

Beweis. Seien A, B disjunkte Teilmengen von E mit $A \sim_G E \sim_G B$. Da $E \sim_G E'$ gilt, gibt es disjunkte Teilmengen A', B' von E' mit $A' \sim_G A$ und $B' \sim_G B$. Dann gilt

$$A' \sim_G A \sim_G E \sim_G E', \qquad B' \sim_G B \sim_G E \sim_G E',$$

also ist E' G-paradox. □

3.4 Theorem. *Sei D eine abzählbare Teilmenge von S^2. Dann sind S^2 und $S^2 \setminus D$* SO(3)-*äquizerlegbar.*

Beweis. Sei ℓ eine Gerade durch den Ursprung, die zu D disjunkt ist. Sei A die Menge der Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$, für die es ein $n \in \mathbb{N}, n > 0$ und einen Punkt $p \in D$ gibt, sodass $\rho(p) \in D$, wobei ρ die Drehung um ℓ mit dem Winkel $n\theta$ ist. Da A abzählbar ist, können wir einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ wählen, der nicht in A ist. Sei ρ die dazugehörige Drehung um ℓ. Dann gilt $\rho^n(D) \cap D = \emptyset$ und daraus folgt $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$ für alle $0 \leq m < n$. Sei nun $\overline{D} = \bigcup\{\rho^n(D) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

$$S^2 = \overline{D} \cup (S^2 \setminus \overline{D}) \sim_{\mathrm{SO}(3)} \rho(\overline{D}) \cup (S^2 \setminus \overline{D}) = (\overline{D} \setminus D) \cup (S^2 \setminus \overline{D}) = S^2 \setminus D.$$

□

3.5 Korollar (Banach-Tarski-Paradoxon, schwache Form). *S^2 ist* SO(3)*-paradox, wie auch jede andere Sphäre deren Mittelpunkt der Ursprung ist. Außerdem ist jeder Ball im $\mathbb{R}^3$* G(3)*-paradox und $\mathbb{R}^3$ selbst ist auch* G(3)*-paradox.*

Beweis. Nach dem Hausdorff-Paradoxon (2.2) ist $S^2 \setminus D$ SO(3)-paradox, wobei D eine abzählbare Menge von Fixpunkten von Drehungen ist. Verwendet man nun Theorem 3.4 und Proposition 3.3, so erhält man, dass auch S^2 SO(3)-paradox ist. Keines der verwendeten Resultate hängt jedoch von der Größe der Sphäre ab, also sind alle Sphären im $\mathbb{R}^2$, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, SO(3)-paradox.

Es genügt Bälle zu betrachten, deren Zentrum im Ursprung liegt, da G(3) alle Translationen aus T(3) enthält. Sei nun B ein Ball um den Ursprung und sei $S = \partial B$, also die dazugehörige Sphäre. Nach dem ersten Teil des Beweises hat S eine SO(3)-paradoxe Zerlegung. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(B \setminus \{0\}),\ A \mapsto \{\alpha p \mid p \in A, 0 < \alpha \leq 1\}$$

Die Zerlegung von S und die Abbildung φ induzieren eine Zerlegung von $B \setminus \{0\}$, die offenbar auch SO(3)-paradox ist. Also ist $B \setminus \{0\}$ SO(3)-paradox und damit insbesondere auch G(3)-paradox. Es genügt also zu zeigen, dass B und $B \setminus \{0\}$ G(3)-äquizerlegbar sind. Sei dazu $p \in B \setminus \{0\}$ und sei ρ eine Drehung unendlicher Ordnung um eine Gerade durch p, die den Ursprung nicht trifft. Sei nun $D = \{\rho^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann ist $0 \in D$ und es gilt $\rho(D) = D \setminus \{0\}$ und damit folgt

$$B = (B \cap D) \cup (B \setminus D) \sim_{\mathrm{SO}(3)} \rho(B \cap D) \cup (B \setminus D) = ((B \cap D) \setminus \{0\}) \cup (B \setminus D) = B \setminus \{0\}.$$

Also ist B SO(3)-paradox und damit sind beliebige Bälle im $\mathbb{R}^3$ G(3)-paradox.

Verwendet man anstatt φ die Abbildung

$$\psi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}),\ A \mapsto \{\alpha p \mid p \in A, \alpha > 0\},$$

so erhält man eine SO(3)-paradoxe Zerlegung von $\mathbb{R}^3$ und komplett analog zum Beweis für Bälle kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ G(3)-äquizerlegbar sind. Also ist auch $\mathbb{R}^3$ G(3)-paradox. □

3.6 Definition. Sei X eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$. Dann gelte $A \preccurlyeq B$, wenn es eine Teilmenge E von B gibt mit $A \sim E$. Dann ist $\preccurlyeq$ eine transitive und reflexive Relation auf den Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

Im Fall, dass es sich bei der Äquivalenzrelation um $\sim_G$ handelt, schreiben wir $\preccurlyeq_G$.

3.7 Theorem (Banach-Schröder-Bernstein-Theorem). *Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert und seien $A, B \subset X$. Wenn $A \preccurlyeq_G B$ und $B \preccurlyeq_G A$ gilt, so gilt $A \sim_G B$. Also ist $\preccurlyeq_G$ eine Halbordnung auf den Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_G$ in $\mathcal{P}(X)$.*

Beweis. Man sieht leicht ein, dass $\sim_G$ die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Wenn $A \sim B$ gilt, dann gibt es eine Bijektion $g : A \to B$, sodass $C \sim g(C)$ für alle Teilmengen C von A.

b) Wenn $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, $A_1 \sim B_1$ und $A_2 \sim B_2$ gilt, so folgt $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

Im Rest des Beweise wird lediglich angenommen, dass $\sim$ eine Äquilvalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$ ist, welche die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Seien $f : A \to B_1 \subset B,\ g : B \to A_1 \subset A$ Bijektionen wie in a). Sei $C_0 = A \setminus A_1$ und induktiv definieren wir $C_{n+1} = g(f(C_n))$. Sei weiter $C = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Nach Konstruktion gilt $A \setminus A_1 \subset C \subset A$. Wir definieren nun die Abbildung

$$h : A \to B,\ x \mapsto h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in C \\ g^{-1}(x), & \text{falls } x \notin C \end{cases}.$$

Wegen $C \subset A$ ist h für alle $x \in C$ definiert. Für alle $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A_1$, also ist h auch für alle $x \in A \setminus C$ definiert und damit ist h wohldefiniert.

Wir konstruieren nun zusätzlich die Abbildung

$$h' : B \to A,\ x \mapsto h'(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & \text{falls } x \in f(C) \\ g(x), & \text{falls } x \in B \setminus f(C) \end{cases}.$$

Offensichtlich ist h' wohldefiniert und man sieht leicht, dass $h' \circ h = \mathrm{id}_A$ und $h \circ h' = \mathrm{id}_B$ gilt. Also ist h' die Umkehrabbildung zu h und damit ist h bijektiv. Nun gilt

$$g^{-1}(A \setminus C) = h(A \setminus C) = h(A) \setminus h(C) = B \setminus f(C).$$

Da $A \setminus C$ eine Teilmenge von A ist und wegen der Wahl von g gilt nun

$$B \setminus f(C) = g^{-1}(A \setminus C) \sim A \setminus C.$$

Wegen der Wahl von f gilt aber auch $C \sim f(C)$ und mit b) folgt dann

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B.$$

□

3.8 Theorem (Banach-Tarski-Paradoxon, starke Form)**.** *Seien A, B zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ mit nichtleerem Inneren. Dann sind A und B $\mathrm{G}(3)$-äquizerlegbar.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $A \preccurlyeq_{\mathrm{G}(3)} B$ gilt, da dann nach dem gleichen Argument $B \preccurlyeq_{\mathrm{G}(3)} A$ gilt und das Banach-Schröder-Berstein-Theorem (3.7) dann $A \sim_{\mathrm{G}(3)} B$ impliziert.

Seien K und L Bälle mit $A \subset K, L \subset B$. Dies ist möglich, da A, B nach Voraussetzung beschränkt sind und ein nichtleeres Inneres haben. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass K von n (sich überlappenden) verschobenen Kopien von L überdeckt werden kann, also

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i(L),$$

mit $g_i \in \mathrm{G}(3)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $(h_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Familie von Translationen aus $\mathrm{G}(3)$, sodass $(h_i(L))_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ eine Familie von paarweise disjunkten Bällen ist. Sei außerdem $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} h_i(L)$. Dann gilt $K \preccurlyeq_{\mathrm{G}(3)} S$.

Nun verwenden wir das schwache Banach-Tarski-Paradoxon um aus L n verschobene Kopien von L und damit $L \sim_{\mathrm{G}(3)} S$ zu erhalten. Dann gilt $A \subset K \preccurlyeq_{\mathrm{G}(3)} S \sim_{\mathrm{G}(3)} L \subset B$ und es folgt $A \preccurlyeq_{\mathrm{G}(3)} B$. □

Notation

Ausdruck	Bedeutung
$\emptyset$	Die leere Menge
$\mathbb{N}$	Die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0
$\mathbb{Z}$	Die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{C}$	Die Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Der n-dimensionale euklidische Raum
S^n	Die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$
$\mathrm{T}(n)$	Die Gruppe der Translationen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{O}(n)$	Die Gruppe der orthogonalen Matrizen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{SO}(n)$	Die Gruppe der Matrizen in $\mathrm{O}(n)$ mit Determinate 1
$\mathrm{G}(n)$	Die Gruppe der Isometrien auf $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{SG}(n)$	Die Gruppe der Isometrien auf $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1
$\mathrm{A}(n)$	Die Gruppe der affinen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{SA}(n)$	Die Gruppe der affinen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1
$\mathrm{GL}(n)$	Die Gruppe der linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{SL}(n)$	Die Gruppe der linearen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge von B, wobei Gleichheit auch zugelassen ist
$A \supset B$	A ist eine Übermenge von B, wobei Gleichheit auch zugelassen ist
$\lvert A\rvert$	Die Kardinalität von A
$\mathcal{P}(A)$	Die Potenzmenge von A
$S(A)$	Die symmetrische Gruppe auf A
∂A	Der topologische Rand von A
id	Die Identität in einer Gruppe
$a \mid b$	a ist ein Teiler von b

Literatur

[1] Wagon, S., *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1985.