Adjunktionen 1

Johannes Loher

16. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Adjunktionen durch natürliche Isomorphismen auf Hom-Mengen

Es seien stets $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien.

1.1 Definition (Adjunktion)**.** Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren. Dann heißt F **linksadjungiert** zu G und G **rechtsadjungiert** zu F, falls es für alle $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ Isomorphismen

$$\varphi_{A,B} : \mathcal{B}(FA, B) \to \mathcal{A}(A, GB)$$

gibt, die natürlich in A und B sind, das heißt, für alle $f \in \mathcal{A}(A', A), g \in \mathcal{B}(B, B')$ kommutieren folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(FA,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & \mathcal{A}(A,GB) \arrow[d, "f^*"] & \mathcal{B}(FA,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathcal{A}(A,GB) \arrow[d, "(Gg)_*"] \\
\mathcal{B}(FA',B) \arrow[r, "\varphi_{A',B}"'] & \mathcal{A}(A',GB) & \mathcal{B}(FA,B') \arrow[r, "\varphi_{A,B'}"'] & \mathcal{A}(A,GB')
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Man schreibt dann $F \dashv G$. $\varphi = (\varphi_{A,B})_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}}$ heißt dann **Adjunktion** zwischen F und G.

1.2 Bemerkung. Sind $g \in \mathcal{B}(FA, B), f \in \mathcal{A}(A, GB)$, so schreiben wir oft auch $\overline{g}$ für $\varphi_{A,B}(g)$ und $\overline{f}$ für $\varphi_{A,B}^{-1}(f)$. Offenbar gilt $\overline{\overline{g}} = g$ und $\overline{\overline{f}} = f$.

1.3 Beispiel (Freie Funktoren und Vergissfunktoren)**.** a) Sei k ein Körper. Dann gibt es eine Adjunktion

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Set} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Vect}_k, \arrow[l, shift left, "U"]
\end{tikzcd}$$

wobei U der Vergissfunktor und F der freie Funktor ist. Sei $V, V' \in \mathrm{Vect}_k$ und $S, S' \in \mathrm{Set}$. Offenbar ist

$$\varphi_{S,V} : \mathrm{Vect}_k(FS, V) \to \mathrm{Set}(S, UV),\ h \mapsto \overline{h} = h|_S$$

ein Isomorphismus, denn die Abbildung

$$\psi_{S,V} : \mathrm{Set}(S, UV) \to \mathrm{Vect}_k(FS, V),\ i \mapsto \overline{i}$$

mit $\overline{i}(\sum_{s \in S} \lambda_s s) = \sum_{s \in S} \lambda_s i(s)$ ist die Umkehrabbildung zu $\varphi_{S,V}$:

$$(\varphi_{S,V} \circ \psi_{S,V}(i))(s) = \overline{i}|_S(1 \cdot s) = 1 \cdot i(s) = i(s)$$

$$(\psi_{S,V} \circ \varphi_{S,V}(h))(v) = \psi_{S,V}(h|_S)(\underbrace{v}_{= \sum_{s \in S} \lambda_s s}) = \sum_{s \in S} \lambda_s h|_S(s) = \sum_{s \in S} \lambda_s h(s) = h\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = h(v)$$

Sei $f \in \mathrm{Set}(S', S)$, $g \in \mathrm{Vect}_k(V, V')$ und $h \in \mathrm{Vect}_k(FS, V)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi_{S',V} \circ (Ff)^*)(h)(s) &= \varphi_{S',V}((Ff)^*(h))(s) \\
&= \varphi_{S',V}(h \circ Ff)(s) \\
&= (h \circ Ff)|_{S'}(s) \\
&= h(\underbrace{Ff(s)}_{= f(s) \in S}) \\
&= h|_S(f(s)) \\
&= (h|_S \circ f)(s) \\
&= ((\varphi_{S,V}(h)) \circ f)(s) \\
&= (f^* \circ \varphi_{S,V})(h)(s),
\end{aligned}$$

also

$$\varphi_{S',V} \circ (Ff)^* = f^* \circ \varphi_{S,V}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}((Ug)_* \circ \varphi_{S,V})(h)(s) &= (Ug)_*(\varphi_{S,V}(h))(s) \\ &= (g \circ h|_S)(s) \\ &= (g \circ h)|_S(s) \\ &= (\varphi_{S,V'}(g \circ h))(s) \\ &= (\varphi_{S,V'}(g_*(h)))(s) \\ &= (\varphi_{S,V'} \circ g_*)(h)(s),\end{aligned}$$

also

$$\varphi_{S,V'} \circ g_* = (Ug)_* \circ \varphi_{S,V}.$$

b) Sei R ein Ring und Mod_R die Kategorie der R-Moduln. Dann hat man analog Adjunktionen

$$\mathrm{Set} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathrm{Grp} \qquad \mathrm{Set} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathrm{Mod}_R$$

wobei U und F jeweils die entsprechenden Vergissfunktoren und freien Funktoren sind.

1.4 Beispiel (kartesisch und exponential)**.** Es sei $Y \in \mathrm{Set}$. Dann haben wir einen Funktor

$$\begin{aligned}&- \times Y : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set} \\ &- \times Y : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set},\ X \mapsto X \times Y \\ &- \times Y : \mathrm{Set}(X, X') \to \mathrm{Set}(X \times Y, X' \times Y),\ f \mapsto (f, \mathrm{id})\end{aligned}$$

Außerdem haben wir einen weiteren Funktor

$$\begin{aligned}&(-)^Y : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set} \\ &(-)^Y : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set},\ X \mapsto X^Y \\ &(-)^Y : \mathrm{Set}(X, X') \to \mathrm{Set}(X^Y, X'^Y),\ f \mapsto f_*\end{aligned}$$

Seien $A, B \in \mathrm{Set}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi_{A,B} : \mathrm{Set}(A \times Y, B) &\to \mathrm{Set}(A, B^Y), \\ h &\mapsto (\varphi_{A,B}(h) : A \to B^Y,\ a \mapsto h(a, -))\end{aligned}$$

ein Isomorphismus, denn

$$\begin{aligned}\psi_{A,B} : \mathrm{Set}(A, B^Y) &\to \mathrm{Set}(A \times Y, B) \\ i &\mapsto (\psi_{A,B}(i) : A \times Y \to B,\ (a, y) \mapsto (i(a))(y))\end{aligned}$$

ist offenbar die Umkehrabbildung zu $\varphi_{A,B}$. Sei nun $f \in \mathrm{Set}(A', A), g \in \mathrm{Set}(B, B')$ und $h \in \mathrm{Set}(A \times Y, B)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_{A',B} \circ (- \times Yf)^*)(h)(a) &= \varphi_{A',B}((f, \mathrm{id})^*(h))(a) \\ &= \varphi_{A',B}(h \circ (f, \mathrm{id}))(a) \\ &= (h \circ (f, \mathrm{id}))(a, -) \\ &= h(f(a), -) \\ &= (\varphi_{A,B}(h))(f(a)) \\ &= (\varphi_{A,B}(h) \circ f)(a) \\ &= (f^* \circ \varphi_{A,B})(h)(a)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(((-)^Y g)_* \circ \varphi_{A,B})(h)(a) &= ((g_*)_* \circ \varphi_{A,B})(h)(a) \\ &= (g_*)_*(\varphi_{A,B}(h))(a) \\ &= (g_* \circ \varphi_{A,B}(h))(a) \\ &= g(\varphi_{A,B}(h)(a)) \\ &= g(h(a,-)) \\ &= (g \circ h)(a,-) \\ &= (\varphi_{A,B'}(g \circ h))(a) \\ &= \varphi_{A,B}(g_*(h))(a) \\ &= (\varphi_{A,B} \circ g_*)(h)(a).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\varphi_{A',B} \circ (- \times Yf)^* = f^* \circ \varphi_{A,B}, \qquad ((-)^Y g)_* \circ \varphi_{A,B} = \varphi_{A,B} \circ g_*,$$

also gilt

$$- \times Y \dashv (-)^Y.$$

1.5 Beispiel. Man hat eine Adjunktion

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[d, "\dashv\ U\ \dashv" description] \\ \mathrm{Set} \arrow[u, shift left=6, "D"] \arrow[u, shift right=6, "I"'] \end{tikzcd}$$

wobei D und I die Funktoren sind, die eine Menge mit der diskreten Topologie, beziehungsweise mit der indiskreten Topologie versehen und U ist der Vergissfunktor.

1.6 Theorem. *Adjunktionen sind eindeutige bis auf Isomorphie. Genauer, sind $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G, G' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren mit $F \dashv G$ und $F \dashv G'$, so gilt bereits $G \cong G'$.*

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{A}(A, GB) \cong \mathcal{B}(FA, B) \cong \mathcal{A}(A, G'B)$$

natürlich in A und B. Nach Yoneda gilt dann also

$$GB \cong G'B$$

und da die Yoneda-Einbettung treu ist, ist diese Isomorphie natürlich in B. Also gilt $G \cong G'$. $\square$

1.7 Bemerkung. Man kann sogar Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie zeigen, siehe z.B. [MacLane98, Theorem IV.7.2]

2 Einheiten und Koeinheiten

Es seien stets $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien.

2.1 Definition (Einheit und Koeinheit)**.** Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren mit $F \dashv G$ und sei φ eine entsprechende Adjunktion. Dann erhalten wir für alle $A \in \mathcal{A}$ eine Abbildung

$$(\eta_A : A \to GFA) = \varphi_{A,FA}(\mathrm{id}_{FA}) = \overline{\mathrm{id}_{FA}}$$

und für alle $B \in \mathcal{B}$ eine Abbildung

$$(\varepsilon_B : FGB \to B) = \varphi^{-1}_{GB,B}(\mathrm{id}_{GB}) = \overline{\mathrm{id}_{GB}}.$$

Wegen der Natürlichkeit von $\varphi_{A,FA}$ und $\varphi^{-1}_{GB,B}$ werden dadurch natürliche Transformationen

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Longrightarrow GF, \qquad \varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$$

definiert. Diese heißen die **Einheit**, beziehungsweise **Koeinheit** der Adjunktion.

2.2 Beispiel. Wir betrachten die Adjunktion $\mathrm{Set} \underset{U}{\overset{F}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Vect}_k$. Die Einheit $\eta : \mathrm{id}_{\mathrm{Set}} \Longrightarrow UF$ hat die Komponenten

$$\begin{aligned} \eta_S : S &\to UFS \\ s &\mapsto s \end{aligned}$$

und die Koeinheit $\varepsilon : FU \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}_k}$ hat die Komponenten

$$\begin{aligned} \varepsilon_V : FUV &\to V \\ \sum_{v \in V} \lambda_v v &\mapsto \sum_{v \in V} \lambda_v v. \end{aligned}$$

2.3 Beispiel. Wir betrachten die Adjunktion $\mathrm{Set} \underset{(-)^Y}{\overset{- \times Y}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Set}$. Die Einheit

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathrm{Set}} \Longrightarrow \left((-)^Y\right)(- \times Y)$$

hat die Komponenten

$$\begin{aligned} \eta_S : S &\to (S \times Y)^Y \\ s &\mapsto (\eta_S(s) : Y \to S \times Y, y \mapsto (s, y)) \end{aligned}$$

und die Koeinheit $\varepsilon : (- \times Y)\left((-)^Y\right) \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Set}}$ hat die Komponenten

$$\begin{aligned} \varepsilon_S : S^Y \times Y &\to S \\ (h, y) &\mapsto h(y). \end{aligned}$$

2.4 Lemma (Dreiecksidentitäten)**.** *Es seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren mit $F \dashv G$ und η, ε seien die Einheit und Koeinheit. Dann kommutieren folgende Diagramme:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Diese beiden Diagramme werden auch ***Dreiecksidentitäten*** *genannt.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}$. Es gilt $\overline{\mathrm{id}_{GFA}} = \varepsilon_{FA}$. Da das linke Diagramm in (1.1) kommutiert, gilt

$$\mathrm{id}_{FA} = \overline{\eta_A} = \overline{\mathrm{id}_{GFA} \circ \eta_A} = \varepsilon_{FA} \circ F\eta_A,$$

also kommutiert das linke Diagramm. Sei $B \in \mathcal{B}$. Es gilt $\eta_{GB} = \overline{\mathrm{id}_{FGB}}$. Da das rechte Diagramm in (1.1) kommutiert, gilt

$$\mathrm{id}_{GB} = \overline{\varepsilon_B} = \overline{\varepsilon_B \circ \mathrm{id}_{FGB}} = G\varepsilon_B \circ \eta_{GB},$$

also kommutiert das rechte Diagramm. □

2.5 Theorem (Adjunktionen durch Einheiten und Koeinheiten)**.** *Es seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Dann gibt es eine Bijektion zwischen*

a) der Menge der Adjunktionen $F \dashv G$ und

b) der Menge der Paare $(\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Longrightarrow GF,\ \varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}})$ von natürlichen Transformationen, die die Dreiecksidentitäten (2.1) *erfüllen.*

Beweis. Wir zeigen, dass es zu jedem Paar (η, ε) von natürlichen Transformationen, die die Dreiecksidentitäten erfüllen, genau eine Adjunktion $F \dashv G$ mit Einheit η und Koeinheit ε gibt.

Eindeutigkeit. Es sei $g \in \mathcal{B}(FA, B)$ und $f \in \mathcal{A}(A, GB)$. Dann gilt für jede Adjunktion $F \dashv G$ mit Einheit η und Koeinheit ε

$$\overline{g} = \overline{g \circ \mathrm{id}_{FA}} = Gg \circ \eta_A$$

und

$$\overline{f} = \overline{\mathrm{id}_{GB} \circ f} = \varepsilon_B \circ Ff.$$

Also ist die Adjunktion schon durch η und ε bestimmt.

Existenz. Es seien $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Longrightarrow GF$, $\varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ natürliche Transformationen, die die Dreiecksidentitäten erfüllen. Für alle $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ definieren wir Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(FA, B) \arrow[r, shift left, "\varphi_{A,B}"] & \mathcal{A}(A, GB) \arrow[l, shift left, "\psi_{A,B}"] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

durch

$$\varphi_{A,B}(g) = \overline{g} = Gg \circ \eta_A$$

und

$$\psi_{A,B}(f) = \overline{f} = \varepsilon_B \circ Ff.$$

Zu $g \in \mathcal{B}(FA, B)$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FA}"'] & FGFA \arrow[r, "FGg"] \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"] & FGB \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\ & FA \arrow[r, "g"'] & B, \end{tikzcd}$$

also gilt

$$\overline{\overline{g}} = \varepsilon_B \circ F\overline{g} = \varepsilon_B \circ FGg \circ F\eta_A = g \circ \mathrm{id}_{FA} = g.$$

Zu $f \in \mathcal{A}(A, GB)$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & GFA \arrow[d, "GFf"] \\
GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GB}"'] & GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] \\
& GB,
\end{tikzcd}$$

also gilt

$$\overline{\overline{f}} = G\overline{f} \circ \eta_A = G\varepsilon_B \circ GFf \circ \eta_A = \mathrm{id}_{GB} \circ f = f.$$

Also ist $\varphi_{A,B}$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\psi_{A,B}$. Wegen der Natürlichkeit von η und ε folgt sofort, dass die Diagramme in (1.1) kommutieren, also definiert (2.2) eine Adjunktion. Diese hat als Einheit η und als Koeinheit ε, denn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\overline{\mathrm{id}_{FA}} = G\,\mathrm{id}_{FA} \circ \eta_A = \mathrm{id}_{GFA} \circ \eta_A = \eta_A$$

und für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\overline{\mathrm{id}_{GB}} = \varepsilon_B \circ F\,\mathrm{id}_{GB} = \varepsilon_B \circ \mathrm{id}_{FGB} = \varepsilon_B.$$

$\square$

2.6 Korollar. *Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es natürliche Transformationen $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Longrightarrow GF$ und $\varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ gibt, die die Dreiecksidentitäten erfüllen.*

2.7 Bemerkung. Wir können also eine Adjunktion $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$ auch als Tupel $(F, G, \eta, \varepsilon)$ von Funktoren und natürlichen Transformationen, die die Dreiecksidentitäten erfüllen, auffassen. Man sagt dann auch $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ ist eine Adjunkton.

2.8 Beispiel (Tensor-Hom Adjunktion)**.** Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $M \in \mathrm{Mod}_R$. Dann haben wir einen Funktor $F = - \otimes M : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ und einen Funktor $G = \mathrm{Hom}(M, -) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$. Wir betrachten nun die natürlichen Transformationen

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_R} \Longrightarrow GF$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \eta_N : N &\to (GFN = \mathrm{Hom}(M, N \otimes M)) \\ n &\mapsto (\eta_N(n) : M \to N \otimes M,\ m \mapsto n \otimes m) \end{aligned}$$

und

$$\varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_R}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_N : (FGN = \mathrm{Hom}(M, N) \otimes M) &\to N \\ \phi \otimes m &\mapsto \phi(m) \end{aligned}$$

auf den Erzeugern. Nun gilt für $\phi \in \mathrm{Hom}(M, N)$ und $m \in M$:

$$\begin{aligned}((G\varepsilon_N \circ \eta_{GN})(\phi))(m) &= G\varepsilon_N(\eta_{GN}(\phi))(m) \\ &= (\varepsilon_N \circ \eta_{GN}(\phi))(m) \\ &= \varepsilon_N((\eta_{GN}(\phi))(m)) \\ &= \varepsilon_N(\phi \otimes m) \\ &= \phi(m)\end{aligned}$$

Also gilt

$$G\varepsilon \circ \eta G = \mathrm{id}_G \,.$$

Weiter gilt für $n \otimes m \in N \otimes M$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{FN} \circ F\eta_N(n \otimes m) &= \varepsilon_{FN}(F\eta_N(n \otimes m)) \\ &= \varepsilon_{FN}(\eta_N(n) \otimes m) \\ &= (\eta_N(n))(m) \\ &= n \otimes m\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\varepsilon F \circ F\eta = \mathrm{id}_F,$$

das heißt η und ε erfüllen die Dreiecksidentitäten. Also gilt $F \dashv G$. $- \otimes M$ hat jedoch kein Linksadjungiertes, da Rechtsadjungierte Limiten erhalten, aber das Tensorprodukt zum Beispiel das Produkt in Mod_R nicht erhält. Dies wird im nächsten Vortrag gezeigt.

3 Adjunktionen durch initiale Objekte

Es seien stets $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Kategorien.

3.1 Definition (Kommakategorie)**.** Es seien $P : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ und $Q : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Die **Kommakategorie** $(P \downarrow Q)$ ist gegeben durch:

- Objekte: Tripel (A, h, B) mit $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ und $h \in \mathcal{C}(P(A), Q(B))$.
- Morphismen $(A, h, B) \to (A', h', B')$: Paare (f, g) von Morphismen $f \in \mathcal{A}(A, A')$ und $g \in \mathcal{B}(B, B')$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} PA \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "h"'] & PA' \arrow[d, "h'"] \\ QB \arrow[r, "Qg"'] & QB' \end{tikzcd}$$

  kommutiert.
- Verknüpfung von Morphismen: Komponentenweise Verknüpfung.

3.2 Beispiel. a) Sei $\mathbb{I}$ die diskrete Kategorie mit einem Element. Funktoren $\mathbb{I} \to \mathcal{A}$ entsprechen Objekten $A \in \mathcal{A}$ und wir schreiben $A : \mathbb{I} \to \mathcal{A}$ für den Funktor, der zu A gehört. Für $A \in \mathcal{A}$ entspricht die Kommakategorie $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \downarrow A)$ der Slicekategorie (Kategorie der Objekte über A) $\mathcal{A}/A$.

b) Sei $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor und $A \in \mathcal{A}$. Wir betrachten die Kommakategorie $(A \downarrow G)$. Die Objekte sind Paare (B, f) mit $B \in \mathcal{B}$ und $f \in \mathcal{A}(A, GB)$. Ein Morphismus

$$q \in (A \downarrow G)\big((B,f),(B',f')\big)$$

ist ein Morphismus $q \in \mathcal{B}(B, B')$, für den das Dreieck

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & GB \arrow[d, "Gq"] \\ & GB' \end{tikzcd}$$

kommutiert.

3.3 Lemma. *Es sei* $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$ *eine Adjunktion. Weiter sei η die Einheit der Adjunktion und $A \in \mathcal{A}$. Dann ist (FA, η_A) initial in $(A \downarrow G)$.*

Beweis. Es sei $(B, f) \in (A \downarrow G)$. Wir wollen nun zeigen, dass es genau einen Morphismus von (FA, η_A) nach (B, f) gibt.

Ein Morphismus $(FA, \eta_A) \to (B, f)$ in $(A \downarrow G)$ ist ein Morphismus $q : FA \to B$ in $\mathcal{B}$, für den das Dreieck

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & GFA \arrow[d, "Gq"] \\ & GB \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

kommutiert. Im Beweis von Theorem 2.5 haben wir gesehen, dass $Gq \circ \eta_A = \overline{q}$ gilt. Also kommutiert (3.1) genau dann, wenn $f = \overline{q}$, das heißt, genau dann, wenn $q = \overline{f}$. Also ist $\overline{f}$ der einzige Morphismus $(FA, \eta_A) \to (B, f)$ in $(A \downarrow G)$. $\square$

3.4 Theorem (Adjunktionen durch initiale Objekte)**.** *Es seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Dann gibt es eine Bijektion zwischen*

a) der Menge der Adjunktionen $F \dashv G$ und

b) der Menge der natürlichen Transformationen $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \Longrightarrow GF$, für die (FA, η_A) für alle $A \in \mathcal{A}$ initial in $(A \downarrow G)$ ist.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass wir zu jeder Adjunktion $F \dashv G$ eine natürliche Transformation η wie in (b) erhalten, nämlich die Einheit. Wir müssen also noch zeigen, dass jedes η wie in (b) die Einheit genau einer Adjunktion $F \dashv G$ ist. Nach Theorem 2.5 reicht es zu zeigen, dass es zu jedem η wie in (b) genau eine natürliche Transformation $\varepsilon : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ gibt, sodass die Dreiecksidentitäten erfüllt sind. Sei also η eine natürliche Transformation wie in (b).

Eindeutigkeit. Seien $\varepsilon, \varepsilon' : FG \Longrightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ natürliche Transformationen derart, dass (η, ε) und (η, ε') die Dreiecksidentitäten erfüllen. Dann kommutiert für alle $B \in \mathcal{B}$ folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GB}"'] & GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] \\ & GB \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Also ist ε_B ein Morphismus $(FGB, \eta_{GB}) \to (B, \mathrm{id}_{GB})$ in $(GB \downarrow G)$. Das gleiche gilt für ε'_B, aber (FGB, η_{GB}) ist initial, also gilt $\varepsilon_B = \varepsilon'_B$ und da dies für alle $b \in \mathcal{B}$ gilt, folgt $\varepsilon = \varepsilon'$.

Existenz. Für $B \in \mathcal{B}$ definieren wir $\varepsilon_B : FGB \to B$ als den eindeutigen Morphismus

$$(FGB, \eta_{GB}) \to (B, \mathrm{id}_{GB})$$

in $(GB \downarrow G)$. Dann kommutiert das Dreieck (3.2) nach Definition. Wir zeigen nun, dass $(\varepsilon_B)_{B \in \mathcal{B}}$ eine natürliche Transformation ist für die (η, ε) den Dreiecksidentitäten genügt.

Sei also $q \in \mathcal{B}(B, B')$. Dann erhalten wir die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GB}"] \arrow[ddr, "Gq"'] & GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] \\
& GB \arrow[d, "Gq"] \\
& GB'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[d, "Gq"'] & GFGB \arrow[d, "GFGq"] \\
GB' \arrow[r, "\eta_{GB'}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GB'}"'] & GFGB' \arrow[d, "G\varepsilon_{B'}"] \\
& GB'
\end{tikzcd}$$

Also sind $q \circ \varepsilon_B$ und $\varepsilon_{B'} \circ FGq$ Morphismen $(FGB, \eta_{GB}) \to (B', G(q))$ und weil (FGB, η_{GB}) initial in $(GB \downarrow G)$ ist, sind sie schon gleich. Dies zeigt die Natürlichkeit von ε.

Wir haben schon gesehen, dass eine der beiden Dreiecksidentitäten erfüllt ist. Die andere besagt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FA}"'] & FGFA \arrow[d, "\varepsilon_{FA}"] \\
& FA
\end{tikzcd}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ kommutiert. Um dies zu zeigen betrachten wir die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[ddr, "\eta_A"'] & GFA \arrow[dd, "\mathrm{id}_{GFA}"] \\
& \\
& GFA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & GFA \arrow[d, "GF\eta_A"] \\
GFA \arrow[r, "\eta_{GFA}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GFA}"'] & GFGFA \arrow[d, "G\varepsilon_{FA}"] \\
& GFA
\end{tikzcd}$$

Da (FA, η_A) initial in $(A \downarrow G)$ ist, erhalten wir

$$\varepsilon_{FA} \circ F\eta_A = \mathrm{id}_{FA}\,.$$

□

3.5 Bemerkung. Theorem 3.4 zeigt, dass für zwei Adjunktionen $(F, G, \eta, \varepsilon), (F, G, \eta, \varepsilon') : \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ bereits $\varepsilon = \varepsilon'$ gilt.

3.6 Beispiel (Universelle Eigenschaft des freien Vektorraums)**.** Es Sei $S \in \mathrm{Set}$ und $V \in \mathrm{Vect}_k$. Dann hat jede Abbildung $f : S \to (V = U(V))$ eine eindeutige lineare Fortsetzung $\overline{f} : FS \to V$, das heißt das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[dr, "f"'] & UFS \arrow[d, "U\overline{f}"] \\ & UV \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist $\eta_S : S \hookrightarrow UFS$ die Inklusion. Das bedeutet gerade, dass (FS, η_S) initial in $(S \downarrow U)$, also gilt $F \dashv U$.

4 Reflektive Unterkategorien

Es seien stets $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kategorien.

4.1 Definition (Reflektive Unterkategorie)**.** Eine Unterkategorie $\mathcal{U}$ von $\mathcal{A}$ heißt reflektiv, wenn sie voll ist und der Inklusionsfunktor ein Linksadjungiertes besitzt.

4.2 Beispiel. Ab ist eine reflektive Unterkategorie von Grp, denn sie ist voll und der Inklusionsfunktor hat als Linksadjungiertes den Funktor, der einer Gruppe G ihre Abelianisierung $G/[G, G]$ zuordnet.

4.3 Definition (Schnitt und Retraktion)**.** Es seien $A, B \in \mathcal{A}$. Ein Morphismus $f \in \mathcal{A}(A, B)$ heißt

- **Retraktion**, wenn er ein Rechtsinverses besitzt, das heißt wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{A}(B, A)$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$
- **Schnitt**, wenn er ein Linksinverses besitzt, das heißt wenn es einen Morphismus $g \in \mathcal{A}(B, A)$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

4.4 Lemma. *Ist ein Morphismus $f \in \mathcal{A}(A, B)$ ein Epimorphismus und ein Schnitt oder ein Monomorphismus und eine Retraktion, so ist er bereits ein Isomorphismus*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{A}(A, B)$ ein Schnitt und ein Epimorphismus. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{A}(B, A)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_B$. Dann gilt

$$f \circ g \circ f = f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$$

und da f ein Epimorphismus ist, gilt $f \circ g = \mathrm{id}_B$, also ist f ein Isomorphismus.

Es sei $f \in \mathcal{A}(A, B)$ eine Retraktion und ein Monomorphismus. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{A}(B, A)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_A$. Dann gilt

$$f \circ g \circ f = \mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_A$$

und da f ein Monomorphismus ist, gilt $g \circ f = \mathrm{id}_A$, also ist f ein Isomorphismus. ☐

4.5 Lemma. *Sei $f \in \mathcal{A}(A, B)$. Dann ist f genau dann ein Epimorphismus, wenn*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

ein Pushoutdiagramm ist.

Beweis. Es sei f ein Epimorphismus. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & B & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Da f ein Epimorphismus ist, gilt schon $g = h$ es gibt genau ein $q = g = h \in \mathcal{A}(B, C)$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & B \arrow[dr, "q"'] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies zeigt die eine Richtung.

Sei also das Diagramm aus der Behauptung ein Pushoutdiagramm. Seien weiter $g, h \in \mathcal{A}(B, C)$ mit $g \circ f = h \circ f$. Dann erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & B & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

Da B das Pushout ist, gibt es genau ein $q \in \mathcal{A}(B, C)$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & B \arrow[dr, "q"'] & \\
& & C
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Also gilt bereits $h = q \circ \mathrm{id}_B = g$. □

4.6 Lemma. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{D}$ habe alle Pushouts. Dann hat auch die entsprechende Funktorkategorie $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ alle Pushouts und diese lassen sich Komponentenweise darstellen.*

Beweis. Es sei

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
H \arrow[r, "\sigma"'] & Q
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. Wir wollen nun einen Funktor $P \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ konstruieren, der das Pushout des Diagramms

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \\ H & \end{tikzcd}$$

ist. Wir erhalten für alle $C \in \mathcal{C}$ folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \arrow[d, "\pi_C"] \\ HC \arrow[r, "\sigma_C"'] & QC \end{tikzcd}$$

Sei PC das Pushout des Diagramms

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \\ HC & \end{tikzcd}$$

Das heißt es gibt genau ein $\rho_C \in \mathcal{D}(PC, QC)$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \arrow[d, "\gamma_C"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_C"] & \\ HC \arrow[r, "\delta_C"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_C"'] & PC \arrow[dr, "\rho_C"] & \\ & & QC \end{tikzcd}$$

Sei außerdem $g \in \mathcal{C}(C, C')$. Dann erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} FC' \arrow[rrr, "\alpha_{C'}"] \arrow[ddd, "\beta_{C'}"'] & & & GC' \arrow[ddd, "\gamma_{C'}"] \\ & FC \arrow[ul, "Fg"] \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \arrow[ur, "Gg"'] \arrow[d, "\gamma_C"] & \\ & HC \arrow[dl, "Hg"] \arrow[r, "\delta_C"'] & PC & \\ HC' \arrow[rrr, "\delta_{C'}"'] & & & PC' \end{tikzcd}$$

Da PC das Pushout ist, gibt es genau ein $Pg \in \mathcal{D}(PC, PC')$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} FC' \arrow[rrr, "\alpha_{C'}"] \arrow[ddd, "\beta_{C'}"'] & & & GC' \arrow[ddd, "\gamma_{C'}"] \\ & FC \arrow[ul, "Fg"] \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \arrow[ur, "Gg"'] \arrow[d, "\gamma_C"] & \\ & HC \arrow[dl, "Hg"] \arrow[r, "\delta_C"'] & PC \arrow[dr, "Pg"'] & \\ HC' \arrow[rrr, "\delta_{C'}"'] & & & PC' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir erhalten also einen Funktor $P : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Außerdem haben wir natürliche Transformationen $\gamma : G \Longrightarrow P$ und $\delta : H \Longrightarrow P$. Außerdem kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
FC' \arrow[rrr, "\alpha_{C'}"] \arrow[ddd, "\beta_{C'}"'] & & & GC' \arrow[dddr, bend left, "\gamma_{C'}"] \arrow[dddddrr, bend left, "\pi_{C'}"] & & \\
& FC \arrow[ul, "Fg"'] \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "\beta_C"'] & GC \arrow[ur, "Gg"'] \arrow[d, "\gamma_C"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_C"] & & & \\
& HC \arrow[r, "\delta_C"'] \arrow[dl, "Hg"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_C"'] & PC \arrow[dr, "\rho_C"] \arrow[ddrr, bend left, "Pg"] & & & \\
HC' \arrow[drrrr, bend right, "\delta_{C'}"] \arrow[ddrrrrr, bend right, "\sigma_{C'}"'] & & & QC \arrow[ddrr, bend right, "Qg"] & & \\
& & & & PC' \arrow[dr, "\rho_{C'}"] & \\
& & & & & QC'
\end{tikzcd}
$$

Deswegen erhalten wir auch eine natürliche Transformation $\rho : P \Longrightarrow Q$ und das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & G \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddr, bend left, "\pi"] & \\
H \arrow[r, "\delta"] \arrow[drr, bend right, "\sigma"'] & P \arrow[dr, "\rho"] & \\
& & Q
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Die natürliche Transformation ρ ist eindeutig, da ihre Komponenten eindeutig sind. $\square$

4.7 Lemma. *Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ sei die entsprechende Funktorkategorie. Seien $F, G \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ und $\alpha \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(F, G)$.*

a) Ist α komponentenweise ein Epimorphismus (Monomorphismus), das heißt für alle $C \in \mathcal{C}$ ist α_C ein Epimorphismus(Monomorphismus), so ist α ein Epimorphismus (Monomorphismus).

b) Hat $\mathcal{D}$ alle Pushouts (Pullbacks), so gilt die Umkehrung von a).

Beweis. a) ist klar und für Epimorphismen folgt b) aus Lemma 4.5 und Lemma 4.6. Die entsprechende Aussage für Monomorphismen folgt durch Dualität. $\square$

4.8 Lemma. *Es seien $A, B \in \mathcal{A}$. Weiter sei $f^* : h^A \Longrightarrow h^B$ die nach dem Yoneda-Lemma von $f \in \mathcal{A}(B, A)$ induzierte natürliche Transformation. Dann ist f^* ein Monomorphismus genau dann, wenn f ein Epimorphismus ist und f^* ist genau dann ein Epimorphismus, wenn f ein Schnitt ist.*

Beweis. Sei f^* ein Monomorphismus. Seien nun $h, h' \in \mathcal{A}(A, C)$ mit $h \circ f = h' \circ f$. Dann gilt:

$$f_C^*(h) = h \circ f = h' \circ f = f_C^*(h')$$

f_C^* ist nach Lemma 4.7 ein Monomorphismus in Set, also injektiv. Deswegen gilt bereits $h = h'$, also ist f ein Epimorphismus.

Sei umgekehrt f ein Epimorphismus und seien $h, h' \in \mathcal{A}(A, C)$ mit $f_C^*(h) = f_C^*(h')$. Dann gilt

$$h \circ f = f_C^*(h) = f_C^*(h') = h' \circ f$$

und da f ein Epimorphismus ist, gilt bereits $h = h'$. Also ist f_C^* injektiv und damit ein Monomorphismus in Set. Nach Lemma 4.7 ist dann f^* ein Monomorphismus.

Ist f^* ein Epimorphismus, dann ist nach Lemma 4.7 f_D^* für alle $D \in \mathcal{A}$ ein Epimorphismus in Set und damit surjektiv. Also gibt es ein $g \in \mathcal{A}(A, B)$ mit $g \circ f = f_B^*(g) = \mathrm{id}_B$. Also ist f ein Schnitt.

Ist umgekehrt f ein Schnitt, so gibt es ein $g \in \mathcal{A}(A, B)$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_B$. Sei $D \in \mathcal{A}$ und $h \in \mathcal{A}(B, D)$ beliebig. Dann gilt

$$h = h \circ \mathrm{id}_B = h \circ g \circ f = f_D^*(h \circ g).$$

Also ist f_D^* für alle $D \in \mathcal{A}$ surjektiv und damit ein Epimorphismus in Set. Folglich ist nach Lemma 4.7 f^* ein Epimorphismus. □

4.9 Theorem. *Sei $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ eine Adjunktion. Dann ist G*

a) genau dann treu, wenn jede Komponente ε_A der Koeinheit ein Epimorphismus ist und

b) genau dann voll, wenn jede Komponente ε_A der Koeinheit ein Schnitt ist.

Also ist G genau dann volltreu, wenn jede Komponente ε_A der Koeinheit ein Isomorphismus ist.

Beweis. Wir wenden das Yoneda-Lemma auf die natürliche Transformation

$$h^A \Longrightarrow h^{FGA}$$

gegeben durch

$$\mathcal{A}(A, C) \xrightarrow{G_{A,C}} \mathcal{B}(GA, GC) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{GA,C}} \mathcal{A}(FGA, C)$$

an. Also ist sie bestimmt durch das Bild von id_A, welches gerade die Definition der Komponente $\varepsilon_A : FGA \to A$ der Koeinheit ist. $\varphi^{-1}_{GA,C}$ ist ein Isomorphismus, also ist die natürliche Transformation wegen Lemma 4.7 genau dann ein Monomorphismus (Epimorphismus), wenn $G_{A,C}$ für alle $A, C \in \mathcal{A}$ injektiv (surjektiv) ist, also wenn G treu (voll) ist. Die Behauptung folgt dann mit Lemma 4.8. □

4.10 Korollar. *Es sei $\mathcal{U}$ eine reflektive Unterkategorie von $\mathcal{A}$ und $(F, I, \eta, \varepsilon) : \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{U}$ die entsprechende Adjunktion. Dann ist ε ein natürlicher Isomorphismus.*

Literatur

[Leinster] Leinster, T., *Category Theory [Course Notes]*.

[MacLane98] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Springer, New York, Second Edition, 1998.

[Awodey10] Awodey, S., *Category Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2010.